

# Einblicke in die $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie

Tobias Jakobi

Fakultät für Mathematik  
Universität Bielefeld

Diplomarbeit

vorgelegt von  
Tobias Jakobi

vorgelegt bei  
Prof. Dr. Friedrich Götze

Februar 2011

Erster Gutachter: Prof. Dr. Friedrich Götze  
Zweiter Gutachter: Dr. Holger Kösters

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Einführung</b>	<b>7</b>
<b>3</b>	<b>Deformation des Fockraums</b>	<b>17</b>
<b>4</b>	<b>Wickformel</b>	<b>35</b>
<b>5</b>	<b>Spektralmaß und Verteilung</b>	<b>57</b>
<b>6</b>	<b>Prozesse, Unabhängigkeit und Konvolution</b>	<b>89</b>
<b>7</b>	<b>Fazit</b>	<b>107</b>



# 1 Einleitung

Eine  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie... was hat man sich unter diesem Begriff genau vorzustellen? Im Grunde geht es hier darum, die historisch gewachsene klassische Wahrscheinlichkeitstheorie mit der noch recht jungen freien Wahrscheinlichkeitstheorie, für deren Studium wir auf [NS06] verweisen wollen, unter einem gemeinsamen „Dach“ zu vereinen. Dies ist primär durch die zahlreichen Parallelen zwischen den beiden Theorien motiviert. Man vermutet hier also eine gemeinsame Struktur, die den beiden Theorien zugrundeliegt.

Wir wollen jedoch bereits vorweg anmerken, dass wir auch am Ende dieser Arbeit noch keine vollkommen zufriedenstellende Antwort auf die Eingangsfrage gefunden haben werden. So ist eine formale Definition der Theorie zur Zeit noch nicht absehbar und wir werden den Begriff deshalb mehr als Ansammlung zahlreicher einzelner Theorien verstehen. Ein passenderer Titel für die Arbeit würde also eher „Einblicke in eine *mögliche*  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie“ lauten.

Für die Vereinheitlichung gilt es also unter anderem ein Objekt zu finden, welches in *einer* Spezialisierung in einen klassischen  $W$ -Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  übergeht, in einer *anderen* jedoch in einen freien nichtkommutativen  $W$ -Raum  $(\mathcal{A}, \varphi)$ . Desweiteren muss geklärt werden, wie genau das allgemeine Objekt spezialisiert wird. Welcher *Parameter* des Objekts legt fest, ob man sich in der klassischen oder in der freien Theorie befindet? Wie sehen Zufallsgrößen der Verallgemeinerung aus und wie erklärt man die Unabhängigkeit zweier solcher Größen? Es stellt sich also grundlegend die Frage, welche Form ein derartig verallgemeinertes Objekt besitzt und welche Eigenschaften sich auf die Verallgemeinerung übertragen lassen bzw. welche davon nur in den Spezialfällen gelten.

Ein Ansatz zur Vereinheitlichung der beiden Theorien scheint der sogenannte  $q$ -deformierte Fockraum zu sein. Wir werden zeigen, dass es sich bei diesem Objekt um einen Hilbertraum handelt, der von einem (reellen) Parameter  $q$  abhängt. Das  $q$  wird der Deformationsparameter der gesamten Konstruktion sein. Für  $q \in [-1, 1]$  will man eine „Interpolation“ der klassischen und der freien Theorie schaffen, derart dass  $q = 0$  den freien, und  $q = 1$  den klassischen Fall liefert. Der andere Randfall  $q = -1$  ist ebenfalls von Relevanz, es existiert aber dort keine derartig ausgereifte Theorie wie in den anderen beiden Spezialfällen.

Betrachtet man die Ursprünge des Objektes *Fockraum*, so liefert gerade die Physik eine mögliche Art der Interpolation. Genauer stammt der Begriff aus der Quantenmechanik, in deren Bereich man auf zwei sich grundsätzlich unterscheidende Teilchenarten stößt. Dies sind auf der einen Seite die Bosonen, Teilchen, die einen ganzzahligen Spin besitzen, sowie auf der anderen Seite die Fermionen, deren Spin halbzahlig ist. Der Spin ist dabei eine quantenmechanische Größe, die mit der Größe des Eigendrehimpulses aus der klassischen Physik verglichen werden kann, aber dennoch kein formal klassisches Pendant besitzt (wie beispielsweise die Größen *Position* und *Impuls*).

Wir werden sehen, dass die  $q$ -Deformation auch hier eine Interpolation liefert, denn bosonische Teilchensysteme können gerade durch den symmetrischen Fockraum ( $q = 1$ ) und fermionische Systeme gerade durch das antisymmetrische Gegenstück ( $q = -1$ ) beschrieben werden. Hier

erlaubt die Deformation folglich Abweichungen bzw. Mischformen der ansonsten diametralen Teilcheneigenschaften. In [Gre91] wird die Deformation genau für diesen Zweck eingesetzt.

Die Arbeit strukturiert sich wie folgt. In der *Einführung* (Kapitel 2) werden wir ein wenig  $q$ -Kombinatorik betreiben und den Begriff der *Mengenpartition* betrachten, der schon in der freien Theorie zur Beschreibung von zahlreichen Eigenschaften Anwendung findet. Es wird vermutet, dass diese Partitionsverbände einen Teil der zugrundeliegenden Struktur, die wir oben bereits angedeutet hatten, zur Interpolation zwischen den beiden Theorien liefern. Im weiteren Verlaufe der Arbeit werden wir immer wieder auf diese Partitionen zurückkommen.

Danach folgt in Kapitel 3 die Konstruktion des Fockraums und seiner  $q$ -Deformation. Auch wollen wir dort Operatoren auf diesen Räumen definieren, was uns zu einem Analogon der Zufallsgrößen mit Grenzverteilung der jeweiligen Theorie führen wird. Angelehnt an die Bezeichnung ihrer klassischen Pendants werden diese Operatoren  *$q$ -Gauß'sche Zufallsvariablen* genannt.

Das anschließende Kapitel 4 widmet sich dem Beweis der sogenannten  *$q$ -Wickformel*, die unter anderem die Berechnung der Momente der  $q$ -Gauß'schen Operatoren ermöglicht. Diese Formel werden wir durch einen kombinatorischen Ansatz zeigen.

In Kapitel 5 gilt unser Interesse dem  $q$ -Spektralmaß, wobei wir hier, im Gegensatz zum vorherigen Abschnitt, den Schwerpunkt mehr auf eine analytische Betrachtung legen. Insbesondere wollen wir untersuchen, wie sich das  $q$ -Spektralmaß auf den Rändern des Interpolationsbereiches verhält.

Den Abschluß wird das Kapitel 6 über „Prozesse, Unabhängigkeit und Konvolution“ bilden, in dem wir einen Überblick über weitere  $q$ -Konstruktionen liefern, die im Kontext einer Wahrscheinlichkeitstheorie ebenfalls eine Rolle spielen. Die Begriffe *Unabhängigkeit* und *Konvolution* stellen unter anderem die Bereiche dar, in denen noch am meisten Unklarheit über eine „vernünftige“ Definition herrscht.

## 2 Einführung

Wir beginnen mit der Betrachtung einiger einfacher sogenannter  $q$ -Analoge und stellen Beziehungen zur symmetrischen Gruppe her. Weiterhin betrachten wir Partitionen von Mengen und die auf diesen Partitionen definierten *Statistiken*. Insbesondere werden wir die Statistik der *Kreuzungen* hervorheben und einige grafische Darstellungsformen sowie in diesem Kontext auftretende Problematiken untersuchen.

**Definition 2.1** ( $q$ -Zahlen, Fakultäten und Gauß'sche Binomiale)

Im Kontext der  $q$ -Deformation von Fockräumen tauchen viele mathematische Konstruktionen in leicht abgewandelter Form als sogenannte  $q$ -Analoge auf. Charakteristische Eigenschaften bleiben dabei (meist) erhalten und durch Übergang von  $q \rightarrow 1$  erhält man die bekannte Konstruktion zurück.

Wir setzen für  $n \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{C}$  die  $q$ -Zahl ( $q$ -integer) als

$$[n]_q := 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} q^i \stackrel{q \neq 1}{=} \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

analog zur bekannten (endlichen) geometrischen Reihe. Mit dem Begriff der  $q$ -Zahl kann der Begriff der  $q$ -Fakultät ( $q$ -factorial)

$$[n]_q! := \prod_{j=1}^n [j]_q \stackrel{q \neq 1}{=} \prod_{j=1}^n \frac{1 - q^j}{1 - q} = (1 - q)^{-n} (1 - q^1) \cdots (1 - q^n)$$

definiert werden, die offensichtlich die Eigenschaft  $[n + 1]_q! = [n + 1]_q \cdot [n]_q!$  erfüllt. Ausgehend von diesem neuen Fakultätsbegriff führen wir den  $q$ -Binomialkoeffizient ( $q$ -binomial)

$$\binom{n}{k}_q := \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n - k]_q!}$$

ein. Offensichtlich ist auch  $\binom{n}{k}_q$  erneut analog zu dem bereits bekannten Objekt konstruiert. Der  $q$ -Binomialkoeffizient ist auch unter dem Namen *Gauß'scher Binomialkoeffizient* bekannt. Es existiert eine Vielzahl weiterer  $q$ -Analoge, wie z.B. für die Exponentialfunktion, das Pochhammersymbol oder die hypergeometrische Reihe.

**Bemerkung 2.2** (Einfache Eigenschaften der  $q$ -Analoge)

- (i) Für  $q = 1$  gilt  $[n]_q! = n!$  und auf diese Weise lässt sich auch der Binomialkoeffizient zurückgewinnen.
- (ii) Für  $|q| < 1$  gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} [n]_q = (1 - q)^{-1}$ .
- (iii) Im Spezialfall  $q = 0$  gilt  $[n]_q = 1$  für  $n \in \mathbb{N}_1$  und damit folgt  $[n]_q! = 1$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

- (iv) Bei  $q$ -Konstruktionen, die einen Ausdruck der Form  $q^k$  mit  $k \in \mathbb{N}_0$  enthalten, ist dieser für den Fall  $q = 0$  immer als

$$q^k = \begin{cases} 0 & : k \geq 1 \\ 1 & : k = 0 \end{cases}$$

zu verstehen.

- (v) Im Allgemeinen werden wir nur reelle Parameter  $q$  mit  $|q| \leq 1$  betrachten und uns sogar meistens auf den Fall  $|q| < 1$  einschränken. Die Randfälle  $q = \pm 1$  werden dann separat betrachtet und wir werden insbesondere darauf hinweisen, wenn ein größerer Parameterbereich betrachtet wird.

**Lemma 2.3** (Fehlstellungen der  $S_n$ )

Sei  $S_n$  die bekannte symmetrische Gruppe, also die Automorphismengruppe einer  $n$ -elementigen Grundmenge. Für  $\pi \in S_l$  sei die Anzahl der *Fehlstellungen* (auch *Inversionen* genannt) durch

$$i(\pi) := i_l(\pi) := \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq l, \pi(i) > \pi(j)\}$$

definiert. Sei nun  $k \in \{1, \dots, n+1\}$  und  $\pi \in S_{n+1, k}$  mit

$$S_{n+1, k} := \{\sigma \in S_{n+1} : \sigma(k) = n+1\},$$

so existiert offensichtlich eine Bijektion zwischen der  $S_{n+1, k}$  und  $S_n$ , d.h. für jedes  $\pi \in S_{n+1, k}$  gibt es ein eindeutiges  $\sigma \in S_n$ . Insbesondere kann diese Bijektion so gewählt werden, dass die Anzahl der Fehlstellungen von  $\pi$  und  $\sigma$  durch

$$i_{n+1}(\pi) = i_n(\sigma) + (n+1) - k$$

auseinander hervorgehen.

*Beweis.* Sei also  $\pi \in S_{n+1, k}$  gegeben, dann setzen wir  $\sigma \in S_{n+1}$  als

$$\sigma(i) := \begin{cases} \pi(i) & : 1 \leq i \leq k-1 \\ \pi(i+1) & : k \leq i \leq n \\ n+1 & : i = n+1 \end{cases}$$

und es gilt offensichtlich  $\sigma \in S_n$  (denn  $n+1$  ist Fixpunkt). Diese Konstruktion ist bijektiv, die Umkehrabbildung lässt sich als

$$\pi(i) := \begin{cases} \sigma(i) & : 1 \leq i \leq k-1 \\ \sigma(i-1) & : k+1 \leq i \leq n+1 \\ n+1 & : i = k \end{cases}$$

angeben.

Anschaulich wird die Bijektion durch einen *Shift* realisiert. Haben wir eine Permutation in Zweizeilen-Notation

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & \mathbf{k} & \cdots & n & n+1 \\ \pi(1) & \pi(2) & \cdots & \mathbf{n+1} & \cdots & \pi(n) & \pi(n+1) \end{pmatrix} \in S_{n+1}$$

gegeben, so erhält man durch



$$\begin{array}{cccccccc}
 (\pi(1) & \pi(2) & \cdots & \mathbf{n+1} & \pi(k+1) & \cdots & \pi(n) & \pi(n+1)) \\
 & & & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\
 (\pi(1) & \pi(2) & \cdots & \pi(k+1) & \pi(k+2) & \cdots & \pi(n+1) & \mathbf{n+1})
 \end{array}$$

das gesuchte  $\sigma \in S_n$ .

Betrachte nun  $i_n(\sigma) = \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$ . Dazu wähle die Zerlegung

$$\{1, \dots, n\} = \overbrace{\{1, \dots, k-1\}}{:=A} \dot{\cup} \overbrace{\{k, \dots, n\}}{:=B},$$

bei der  $\pi$  und  $\sigma$  auf  $A$  übereinstimmen, auf  $B$  jedoch  $\sigma(i) = \pi(i+1)$  gilt. Also gibt es für  $i, j$  insgesamt drei mögliche Fälle:

- (i)  $i, j \in A$ , denn mit  $i < j$  folgt bereits  $(j \in A \Rightarrow i \in A)$ .
- (ii)  $i, j \in B$  (wie oben gilt auch hier  $(i \in B \Rightarrow j \in B)$ )
- (iii)  $i \in A$  und  $j \in B$

Wir wollen die Bedingung  $1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)$  in  $i_n(\sigma)$  mit  $(*)$  abkürzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 i_n(\sigma) &= \#\{(i, j) : (*) \text{ mit } i, j \in A\} + \#\{(i, j) : (*) \text{ mit } i, j \in B\} + \\
 &\quad \#\{(i, j) : (*) \text{ mit } i \in A, j \in B\} \\
 &= \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k-1, \pi(i) > \pi(j)\} + \\
 &\quad \#\{(i, j) : k \leq i < j \leq n, \pi(i+1) > \pi(j+1)\} + \\
 &\quad \#\{(i, j) : 1 \leq i \leq k-1, k+1 \leq j \leq n+1, \pi(i) > \pi(j)\} \\
 &=: \alpha_\sigma + \beta_\sigma + \gamma_\sigma
 \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$\begin{aligned}
 \alpha_\pi &:= \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq k, \pi(i) > \pi(j)\} = \alpha_\sigma, \\
 &\quad \text{denn keines der obigen } i \text{ erfüllt } \pi(i) > \pi(k) = n+1 \\
 \beta_\pi &:= \#\{(i, j) : k+1 \leq i < j \leq n+1, \pi(i) > \pi(j)\} = \beta_\sigma \\
 \gamma_\pi &:= \#\{(i, j) : 1 \leq i \leq k, k+1 \leq j \leq n+1, \pi(i) > \pi(j)\} \\
 &= \#\{(i, j) : 1 \leq i \leq k-1, k+1 \leq j \leq n+1, \pi(i) > \pi(j)\} + \\
 &\quad \#\{(i, j) : 1 \leq i = k, k+1 \leq j \leq n+1, \underbrace{n+1 = \pi(k) = \pi(i) > \pi(j)}_{\text{immer erfüllt}}\} \\
 &= \gamma_\sigma + \#\{j : k+1 \leq j \leq n+1\} = \gamma_\sigma + (n+1) - k
 \end{aligned}$$

Offensichtlich setzt sich aber aus  $\alpha_\pi, \beta_\pi$  und  $\gamma_\pi$  gerade  $i_{n+1}(\pi)$  zusammen. Also erhalten wir

$$i_n(\sigma) = \alpha_\pi + \beta_\pi + \gamma_\pi + k - (n+1)$$

und somit die gewünschte Behauptung  $i_{n+1}(\pi) = i_n(\sigma) + (n+1) - k$ .  $\square$

**Satz 2.4** (Beschreibung der  $q$ -Fakultät durch die  $S_n$ )

Erneut betrachten wir die symmetrische Gruppe  $S_n$  und wieder bezeichnet  $i(\pi)$  für  $\pi \in S_n$  die Anzahl der Fehlstellungen der Permutation. Dann gilt:

$$[n]_q! = \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)}$$

Insbesondere erhält man für  $q = 1$  die Anzahl der Elemente der  $S_n$  wie folgt:

$$\sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} = \sum_{\pi \in S_n} 1 = \#S_n = n! = [n]_1!$$

*Beweis.* Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Für  $n = 1$  ist die Aussage klar, denn  $[1]_q = 1$  und die  $S_1$  besteht nur aus der Identität (für die  $i(\text{id}) = 0$  gilt, denn sie besitzt offensichtlich keine Fehlstellungen).

Nun verwenden wir die Formel über die Fehlstellungen aus dem vorherigen Lemma 2.3, um den Induktionsschritt zu beweisen:

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in S_{n+1}} q^{i(\pi)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\substack{\pi \in S_{n+1} \\ \pi(k)=n+1}} q^{i_{n+1}(\pi)} \stackrel{2.3}{=} \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_n} q^{i_n(\sigma) + (n+1) - k} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} q^{(n+1) - k} \sum_{\sigma \in S_n} q^{i(\sigma)} \stackrel{\text{I.V.}}{=} [n]_q! \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n+1} q^{(n+1) - k}}_{\sum_{k=0}^n q^k} \\ &= [n]_q! \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = [n]_q! \cdot [n + 1]_q = [n + 1]_q! \end{aligned}$$

□

### Definition 2.5 (Partitionen von Mengen)

Sei nun  $M$  eine total geordnete Menge sowie  $n \in \mathbb{N}_1$ . Dann nennen wir  $\pi = \{B_1, \dots, B_n\}$  eine Partition von  $M$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- (a)  $\forall i \in \{1, \dots, n\} : M \supseteq B_i \neq \emptyset$
- (b)  $\forall i, j \in \{1, \dots, n\} : i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$
- (c)  $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i = M$

Die  $B_i$  werden die *Blöcke* der Partition  $\pi$  genannt, ihre Anzahl bezeichnen wir mit  $|\pi|$ . Dies stellt also die Anzahl der Komponenten dar, in die die Menge zerlegt wird. Außerdem schreiben wir  $s \sim_\pi t$ , wenn  $s, t \in M$  sind und zu demselben Block gehören. Wie man leicht sieht, ist das  $\sim_\pi$  eine Äquivalenzrelation. Die Menge aller Partitionen der Menge  $M$  notieren wir als  $\mathcal{P}(M)$ . Meistens betrachtet man Mengen  $M$  der Form  $M = \{1, \dots, m\}$  ( $m \in \mathbb{N}_1$ ), in diesem Fall schreibt man auch einfach  $\mathcal{P}(m)$ .

Auf  $\mathcal{P}(m)$  ist in natürlicher Weise eine partielle Ordnung  $\leq$  durch sogenannte *Verfeinerung* definiert. Seien  $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{P}(m)$  gegeben, so gilt  $\pi_1 \leq \pi_2$ , wenn  $\pi_2$  aus  $\pi_1$  durch Zusammenfügen von Blöcken entsteht. Anders herum betrachtet entsteht  $\pi_1$  dadurch, dass Blöcke aus  $\pi_2$  in kleinere Blöcke *zerteilt* (und damit *feiner*) werden. Das kleinste (*feinste*) Element  $\{(1), (2), \dots, (m)\}$  wird mit  $\hat{0}$ , das größte (*gröbste*)  $\{(1, 2, \dots, m)\}$  mit  $\hat{1}$  bezeichnet.

### Definition 2.6 (Nichtkreuzende Partitionen)

Sei nun  $\pi$  eine Partition von  $M$  und es seien  $s_1, s_2, t_1, t_2 \in M$  gegeben mit  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$  und  $s_1 \sim_\pi s_2 \not\sim_\pi t_1 \sim_\pi t_2$ . Dies bedeutet, dass  $s_1, s_2$  und  $t_1, t_2$  zu unterschiedlichen Blöcken gehören (die  $s_i$  bzw. die  $t_i$  aber im selben Block liegen). Tritt diese Situation ein, so nennen wir  $\pi$  eine kreuzende Partition und das Paar  $\{s_1, s_2\}, \{t_1, t_2\}$  eine Kreuzung. Eine Partition ohne derartige

Kreuzungen wird *nichtkreuzend* genannt.

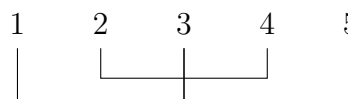
Offensichtlich wird der Begriff der Kreuzung, wenn man die Partition grafisch darstellt. Siehe dazu das kommende Beispiel 2.7. Eine Kreuzung wird ebenfalls häufig durch einen einzelnen 4-Tupel, im obigen Falle also  $(s_1, t_1, s_2, t_2)$ , bezeichnet. Die Reihenfolge der Elemente im Tupel gibt dann bereits die Anordnung der Elemente vor.

Die Menge aller nichtkreuzenden Partitionen notieren wir mit  $\mathcal{NC}(M)$ . Ebenfalls von Bedeutung sind sogenannten Paarpartitionen, dies sind Partitionen  $\pi$  mit Blöcken  $|B_i| = 2$  für alle  $i$ . Hier werden natürlich nur Mengen  $M$  mit  $|M| \in 2\mathbb{N}_1$  betrachtet. Wie schon bei den normalen Partitionen, kann man auch hier die nichtkreuzende Variante betrachten. Die Paarpartitionen werden mit dem Symbol  $\mathcal{P}_2(M)$  und die nichtkreuzende Variante mit  $\mathcal{NC}_2(M)$  notiert. Analog zu Definition 2.5 erklärt man die Symbole  $\mathcal{P}_2(m)$ ,  $\mathcal{NC}_2(m)$ , wenn man mit Mengen der kanonischen Form  $M = \{1, \dots, m\}$  arbeitet.

Insbesondere benötigen wir im Folgenden die Anzahl der Kreuzungen einer Partition. Derartige Informationen sind allgemeiner als *Partitionsstatistiken* bekannt, dazu später mehr.

**Beispiel 2.7** (Grafische Darstellung von Partitionen)

Dargestellt ist die Partition  $\pi = \{B_1 = \{1, 3, 5\}, B_2 = \{2, 4\}\}$ , die vom Typ *kreuzend* ist.



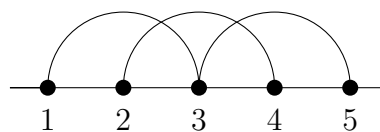
Man sieht, dass sich hier die Blöcke  $B_1$  und  $B_2$  kreuzen. Ein Beispiel für eine *nichtkreuzende* Partition ist  $\pi' = \{B'_1 = \{1, 2\}, B'_2 = \{3, 4\}, B'_3 = \{5\}\}$ , bei der die Blöcke offensichtlich alle alleine stehen:



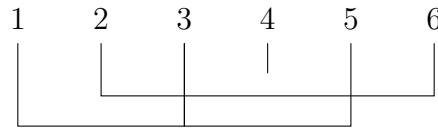
Die obige Darstellung mit eckigen Bögen ist in mehreren Arbeiten zu finden (siehe [NS06, Lecture 9] für den Einsatz in der *freien Wahrscheinlichkeitstheorie*), sie eignet sich aber nur bedingt. So zählt man in der obigen Darstellung nur *eine* Kreuzung für die Partition  $\pi$ , erkennt aber spätestens beim Nachrechnen anhand der Definition 2.6, dass  $\pi$  zwei Kreuzungen besitzt (nämlich die 4-Tupel  $(1, 2, 3, 4)$  sowie  $(2, 3, 4, 5)$ ). Interessiert man sich allerdings nur dafür, ob ein  $\pi$  kreuzend oder nichtkreuzend ist, so ist die eckige Darstellung ausreichend. Das richtige Zählen von Kreuzungen einer Partition wird sich als eines der zentralen Probleme im Bereich der  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie herausstellen.

**Beispiel 2.8** (Alternative Bogendarstellung)

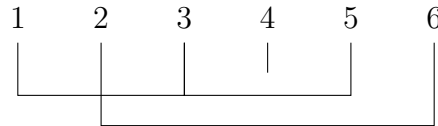
Wir betrachten erneut die Partition  $\pi$  aus Beispiel 2.7. Dabei wählen wir hier jedoch eine andere Visualisierung, die anstatt eckiger Bögen runde Verbindungen verwendet. Dies hat offensichtlich erhebliche Auswirkungen auf die Anzahl der gezählten Kreuzungen:



Hier stimmt die Anzahl (wir zählen 2 Kreuzungen) mit der Rechnung überein. Nehmen wir eine weitere Partition  $\sigma = \{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4\}\}$ , so treten hier bereits bei der eckigen Darstellung Mehrdeutigkeitsprobleme auf:

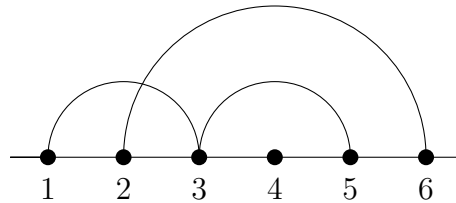


Hier verläuft die Verbindung des Blocks  $\{1, 3, 5\}$  unterhalb der des Blocks  $\{2, 6\}$  und wir zählen zwei Kreuzungen. Vertauschen wir die Verbindungslinien ( $\{1, 3, 5\}$  oberhalb von  $\{2, 6\}$ ), so fällt eine der Kreuzungen weg:



In diesem Fall ist die erste Darstellung (mit 2 Kreuzungen) von  $\sigma$  korrekt, denn  $(1, 2, 3, 6)$  und  $(1, 2, 5, 6)$  erfüllen die Kreuzungsbedingung.

Derartige *Probleme* beim Ablesen der Kreuzungen führen auf den Begriff der eingeschränkten Kreuzung (*restricted crossing*). Diese Kreuzungstypen lassen sich eindeutig visualisieren und würden für das obigen  $\sigma$  auf folgende Darstellung führen:



**Definition 2.9** (Eingeschränkte Kreuzungen nach Biane)

Seien  $M$  und  $\pi$  wie in Definition 2.6 gegeben, sowie zusätzlich  $i, j \in M$ . Dann sagen wir, dass  $j$  auf  $i$  folgt, wenn die Bedingungen gelten:

- (i) Die Elemente  $i, j$  liegen im selben Block mit  $i < j$ .
- (ii) Es existiert kein  $k \in M$  mit  $i < k < j$  und  $k \sim_{\pi} i$ .

Ist nun eine Kreuzung, also ein 4-Tupel  $(s_1, t_1, s_2, t_2)$  (wieder wie in 2.6) gegeben, so nennen wir diesen Tupel eine *eingeschränkte Kreuzung* (*restricted crossing*), wenn  $s_2$  auf  $s_1$ , sowie  $t_2$  auf  $t_1$  folgt.

Man beachte, dass diese Eigenschaft bei Paarpartmention nicht relevant ist, da sich in jedem Block nur zwei Elemente aufhalten und damit die Bedingung (ii) immer erfüllt ist. Auch sieht man schnell, dass der Begriff der nichtkreuzenden Partition erhalten bleibt: Es ist offensichtlich, dass eine Partition ohne Kreuzungen auch keine von eingeschränktem Typ besitzen kann. Aber sogar die Umkehrung ist richtig. Ein formaler Beweis folgt in Kürze.

Der obige Kreuzungstyp stammt aus [Bia97, Abschnitt 2] und ist selbst ein Spezialfall eines allgemeineren Begriffes, dem der Kreuzung bzgl. einer zyklischen Permutation (siehe [Bia97, Abschnitt 1.3] für eine genaue Definition).

Insbesondere wollen wir betonen, dass die eingeschränkten Kreuzungen, wie bereits in Beispiel 2.8 erwähnt, in der Bogendarstellung eindeutig ablesbar sind. Dazu ordnet man die zu partitionierenden Elemente als dicke Punkte in äquidistantem Abstand auf einer Grundlinie an. Nun betrachtet man sukzessive die Blöcke der darzustellenden Partition, wobei man die Elemente des Block aufsteigend vorsortiert. Gegeben einen solchen Block  $B = \{j_1, \dots, j_k\}$  verbindet man

nun für alle  $1 \leq i < k$  die Paare  $(j_i, j_{i+1})$  oberhalb der Grundlinie durch Halbkreise. Dann haben zwei Halbkreise genau dann einen Schnittpunkt, wenn die zugehörigen vier Punkte eine eingeschränkte Kreuzung bilden.

**Definition 2.10** (Links-reduzierte Kreuzungen nach Nica)

Eine weitere Modifikation des Kreuzungsbegriffes durch Nica findet in [Nic95] Verwendung. Sei  $(s_1, t_1, s_2, t_2)$  wieder eine Kreuzung. Wir nennen ein Element  $i \in M$  *links-minimal*, falls

$$\forall j \in M : j \sim_{\pi} i \implies i \leq j$$

gilt. Ein links-minimales Element ist also ein minimales Element im zugehörigen Block. Wenn in der Kreuzung sowohl  $s_1$  als auch  $t_1$  links-minimal sind, so nennen wir die Kreuzung *links-reduziert*. Für Paarpartitionen ist diese Eigenschaft wegen der Größe der Blöcke wieder trivialerweise erfüllt, d.h. jede Kreuzung ist auch automatisch links-reduziert.

Die Eigenschaft  $s_2 \approx_{\pi} t_1$  aus Definition 2.6 kann hier sogar fallen gelassen werden, denn aus  $t_1 < s_2$  und der Reduziertheitsbedingung folgt bereits, dass  $\{s_1, s_2\}$  und  $\{t_1, t_2\}$  aus unterschiedlichen Blöcken stammen.

**Definition 2.11** (Statistiken auf Partitionen)

Um besser mit den Eigenschaften einer Partition  $\pi$  umgehen zu können, führt man sogenannte Partitionsstatistiken (im Folgenden nur noch Statistiken genannt) ein. Eine recht bekannte Statistik ist uns auch bereits in Definition 2.6 begegnet. Dies ist  $cr$ , die Anzahl der Kreuzungen (*crossings*) einer Partition, die formal als

$$cr(\pi) = \#\{\alpha := (s_1, t_1, s_2, t_2) : \alpha \text{ ist Kreuzung für } \pi \text{ nach (2.6)}\}$$

definiert ist. Analog definiert sich  $rc(\pi)$ , wobei dort nur die eingeschränkten Kreuzungen  $\alpha$  gezählt werden. Wie wir bereits erwähnt hatten, fallen für  $\pi \in \mathcal{P}_2(2m)$  die beiden Statistiken zusammen. Der Kreuzungsbegriff aus Definition 2.10 induziert die üblicherweise als  $c_0(\pi)$  bezeichnete Statistik.

Sei nun  $\pi$  eine Paarpartition der Menge  $M := \{1, 2, \dots, 2m\}$  (also  $|M| = 2m$ ) und  $B = (i, j) \in \pi$  ein Block. Dann soll  $inpt(i, j)$  die Anzahl der Elemente  $k$  sein, für die  $i < k < j$  gilt (die inneren Punkte des Blocks). Summiert man über die inneren Punkte aller Blöcke, so erhält man die Statistik

$$ip(\pi) = \sum_{(i,j) \in \pi} inpt(i, j).$$

Hat man die Paarpartition in der Darstellung  $\pi = \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_m, j_m)\}$  mit  $i_k < j_k \forall k$ , dann vereinfacht sich der Ausdruck zu

$$ip(\pi) = \sum_{k=1}^m (j_k - i_k - 1).$$

Die Statistik  $inpt(i, j)$  ist auch unter dem Begriff der Lücken eines Blocks (*gap*) bekannt. Eine weitere Statistik, die im Bereich der  $q$ -deformierten Fockräume im Einsatz ist, ist die Anzahl der entarteten Kreuzungen (*degenerate crossings*) und wird mit  $d(\pi)$  bezeichnet. Diese findet Verwendung, wenn man als Partitionen  $\pi$  sogenannte *Feynman-Diagramme* betrachtet. Dies sind Paarpartitionen, die zusätzlich durch einzelne, also unverbundene, Elemente ergänzt worden sind. Diese Einzelblöcke  $B_k$  mit  $|B_k| = 1$  werden *Singletons* genannt. Eine entartete Kreuzung tritt dort auf, wo ein Singleton im Inneren eines Paarblocs liegt, d.h. wenn  $i < k < j$

für ein Paar  $(i, j) \in \pi$  und  $(k)$  ein Singleton gilt.

Anwendung finden die weiteren Statistiken z.B. in der Arbeit [EP03]. Für uns sind im weiteren Verlauf allerdings hauptsächlich die Kreuzungsstatistiken von Interesse.

*Beweis der Bemerkung in Definition 2.9.* Die Richtung  $cr(\pi) = 0 \Rightarrow rc(\pi) = 0$  ist klar, da die Menge der eingeschränkten Kreuzungen in der Menge der Kreuzungen enthalten ist.

Zeige die andere Richtung  $cr(\pi) \neq 0 \Rightarrow rc(\pi) \neq 0$ . Sei dazu  $\alpha := (s_1, t_1, s_2, t_2)$  eine Kreuzung, d.h. es gelte  $s_1 < t_1 < s_2 < t_2$  sowie alle weiteren Eigenschaften aus Definition 2.6. Wir wollen aus  $\alpha$  eine eingeschränkte Kreuzung  $\beta$  konstruieren. Ist das gewählte  $\alpha$  bereits eingeschränkt, so sind wir fertig ( $\beta := \alpha$ ). Falls dies nicht der Fall ist, so existieren zwei Fälle:

(a)  $s_2$  folgt nicht auf  $s_1$  **oder**

(b)  $t_2$  folgt nicht auf  $t_1$

Dabei können (a) und (b) natürlich gleichzeitig auftreten. Wir betrachten zunächst die Konfiguration in der nur ein Fall eintritt.

Es gelte also Fall (a), damit existiert mindestens ein  $s'$  mit  $s_1 < s' < s_2$  und  $s' \sim_\pi s_1$ . Genauer gesagt existiert eine endliche Familie  $\{\bar{s}_j\}_{1 \leq j \leq n}$  derart, dass

$$s_1 = \bar{s}_1 < \dots < \bar{s}_k < t_1 < \bar{s}_{k+1} < \dots < \bar{s}_n = s_2$$

sowie  $\bar{s}_j \sim_\pi s_1$  für alle  $j$  gilt (insbesondere haben wir  $n \geq 3$ ). Wähle  $s' := \bar{s}_k$  sowie  $s'' := \bar{s}_{k+1}$ , dann folgt  $s''$  offensichtlich auf  $s'$ . Nach Voraussetzung folgt  $t_2$  bereits auf  $t_1$ , also sind wir an dieser Stelle fertig. Wir definieren  $\beta := (s', t_1, s'', t_2)$ , so ist dies unsere gesuchte eingeschränkte Kreuzung.

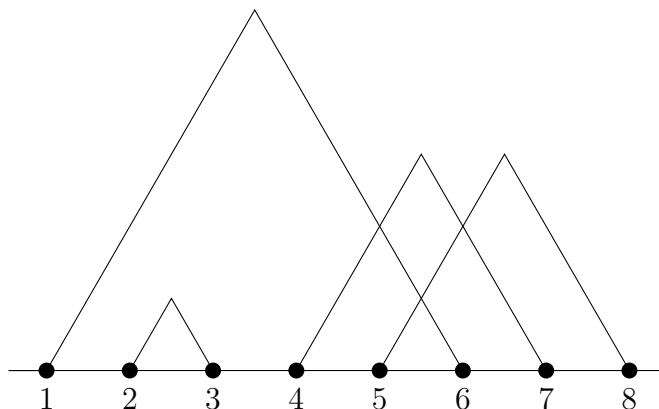
Tritt der Fall (b) alleine auf, so läuft die Konstruktion von  $\beta$  vollständig analog. Treten beide Fälle jedoch gleichzeitig auf, so muss die Konstruktion nach dem Erhalten von  $s'$  und  $s''$  fortgesetzt werden. Aber die Kreuzung  $\alpha_0 := (s', t_1, s'', t_2)$  erfüllt natürlich nur die Bedingung aus (b), also erhalten wir auch hier am Ende ein passendes  $\beta$ . Damit ist  $rc(\pi) > 0$  und die Behauptung folgt.  $\square$

Wie man sieht, gibt es mehrere unterschiedliche Arten, die Kreuzungen von Partitionen zu zählen, wenn man nicht gerade Paarpartitionen betrachtet. Einsatz finden die zugehörigen Statistiken insbesondere bei der Suche nach einer *guten*  $q$ -deformierten Faltung, siehe unter anderem Definition 6.9.

Leider gibt es in diesem Bereich, von Spezialfällen abgesehen, noch kein zufriedenstellendes Ergebnis. Allerdings verwenden alle Konstruktionen, die auf einen derartigen Begriff hinarbeiten, an einer zentralen Stelle eine Kreuzungsstatistik für Mengensegmente. Man wird sehen, dass die *richtige* Wahl dieser Statistik entscheidenden Einfluss auf die Eigenschaften des konstruierten Objektes hat. Welche aber die richtige Wahl ist, bleibt jedoch weiterhin unklar.

**Bemerkung 2.12** (Dreiecksdarstellung von Paarpartitionen)

Eine weitere Darstellungsform findet sich häufig bei Paarpartitionen. Ähnlich wie bei der Bogendarstellung verbindet man hier die Paare durch das Zeichnen von gleichseitigen Dreiecken:



Die Diagramme werden allerdings durch die Ausmaße der Dreiecke recht schnell groß und unübersichtlich. Wir ziehen deshalb die Bogendarstellung vor und wollen ausschließlich diese im weiteren Verlauf einsetzen.

**Definition 2.13** (Funktionen auf Paarpartitionen und Multiplikatивität)

Bezeichne mit  $\mathcal{P}_2(1, 2, \dots, 2n)$  die Menge der Paarpartitionen auf der Menge  $\{1, 2, \dots, 2n\}$  (vergleiche auch Definition 2.5) und setze

$$\mathcal{P}_2(\infty) := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{P}_2(1, 2, \dots, 2n).$$

Betrachte nun Abbildungen  $t : \mathcal{P}_2(\infty) \rightarrow \mathbb{C}$ . Wir nennen  $t$  *schwach multiplikativ*, wenn gilt:

- (i) Für alle  $k, m \in \mathbb{N}$  mit  $k < m$  und  $\forall (\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{P}_2(1, \dots, k) \times \mathcal{P}_2(k+1, \dots, m)$  faktorisiert  $t$  in der Weise  $t(\pi_1 \cup \pi_2) = t(\pi_1) \cdot t(\pi_2)$ .

Die Abbildung wird *stark multiplikativ* genannt, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

- (ii) Für alle  $k, l, m \in \mathbb{N}$  mit  $k < l < m$  und  $\forall (\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{P}_2(1, \dots, k, l+1, \dots, m) \times \mathcal{P}_2(k+1, \dots, l)$  faktorisiert  $t$  in der Weise  $t(\pi_1 \cup \pi_2) = t(\pi_1) \cdot t(\pi_2)$ .

Schwache Multiplikatивität erlaubt also das Zusammensetzen zweier Paarpartition, während die starke Multiplikatивität einen Schritt weiter geht: Die Funktion  $t$  verhält sich weiterhin gutartig, wenn die Partition  $\pi_1$  an einer Stelle *aufgetrennt* wird und dort die Partition  $\pi_2$  eingefügt wird.

**Bemerkung 2.14** (Bemerkung zu Definition 2.13)

In den folgenden Abschnitten werden wir häufig mit der Funktion

$$t_q(\pi) := q^{cr(\pi)} \quad (|q| < 1)$$

arbeiten. Aus [BY06, Abschnitt 6] (siehe insbesondere *Remark 10*) ist die starke Multiplikatивität von  $t_q$  bekannt. Dort werden unter Verwendung von Partitionsstatistiken (wie z.B. den *inneren Punkten* aus Definition 2.11) auch weitere multiplikative Funktionen konstruiert.

Wie in Bemerkung 2.2 erklärt, gibt die Abbildung  $t_q$  im Spezialfall  $q = 0$  nur für Partitionen  $\pi$  einen Beitrag, für die  $cr(\pi) = 0$  gilt. Hier tauchen also auf natürliche Weise die nichtkreuzenden Partitionen aus der freien Wahrscheinlichkeitstheorie auf.





# 3 Deformation des Fockraums

Wir wollen nun das Objekt *Fockraum* sowohl in seiner kanonischen als auch in der  $q$ -deformierten Variante erklären. Weiterhin gilt unser Interesse einer Klasse von Operatoren, deren Definition durch die Quantenmechanik motiviert ist.

Im Folgenden werden wir uns nun immer auf den Parameterbereich  $q \in (-1, 1)$  einschränken und explizit anmerken, wenn die Randwerte  $q = \pm 1$  mitbetrachtet werden.

**Bemerkung 3.1** (Hilbertraum-Notation und inneres Produkt)

Sei  $\mathcal{H}$  ein (möglicherweise komplexer) Hilbertraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Im Folgenden verstehen wir  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  immer als konjugiert-linear in der *ersten* Komponente und linear in der *zweiten* Komponente.

**Definition 3.2** (Komplexifizierung eines Hilbertraums)

Ist  $\mathcal{H}$  ein reeller Hilbertraum (also ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt, der vollständig ist), so bezeichnet  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \mathcal{H} \oplus i\mathcal{H}$  den *komplexifizierten* Hilbertraum.

Formal definiert man den Vektorraum  $V_{\mathbb{C}} := \{x + iy : x, y \in V(\mathcal{H})\}$ , wobei  $V(\mathcal{H})$  der Vektorraum ist, der  $\mathcal{H}$  zugrunde liegt. Addition und Skalarmultiplikation auf  $V_{\mathbb{C}}$  sind kanonisch definiert. Für  $v, w \in V_{\mathbb{C}}$  mit den Darstellungen  $v = x_0 + iy_0$  und  $w = x_1 + iy_1$  definiert man das neue innere Produkt durch

$$\langle v | w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle x_0 | x_1 \rangle + \langle y_0 | y_1 \rangle + i(\langle x_0 | y_1 \rangle - \langle y_0 | x_1 \rangle),$$

wobei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das bereits vorhandene Produkt von  $\mathcal{H}$  ist. Man rechnet leicht nach, dass  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  in der Tat ein inneres Produkt auf  $V_{\mathbb{C}}$  ist. Damit setzen wir  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := (V_{\mathbb{C}}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}})$  und sind fertig, denn die Vollständigkeit von  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$  folgt sofort.

**Bemerkung 3.3** (Tensorprodukte von Hilberträumen)

Seien  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  Hilberträume, so kann das (Hilbertraum-)Tensorprodukt von  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  wie folgt gebildet werden:

Man betrachte  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  das normale Tensorprodukt von Vektorräumen. Nun sind auf  $\mathcal{H}_1$  und  $\mathcal{H}_2$  die Skalarprodukte  $\langle \cdot | \cdot \rangle_1$  bzw.  $\langle \cdot | \cdot \rangle_2$  gegeben. Diese verwendet man zur Definition des kanonischen Skalarprodukts

$$\langle x_1 \otimes x_2 | y_1 \otimes y_2 \rangle_{\otimes} := \langle x_1 | y_1 \rangle_1 \langle x_2 | y_2 \rangle_2, \tag{3.1}$$

wobei  $x_1, y_1 \in \mathcal{H}_1$  sowie  $x_2, y_2 \in \mathcal{H}_2$ . Durch lineare Erweiterung erhält man ein Skalarprodukt auf dem ganzen Tensorprodukt. Das gesuchte Hilbertraum-Tensorprodukt ist dann durch die Vervollständigung von  $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$  bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\otimes}$  gegeben.

*Beweis.* Da Tensorprodukte über Äquivalenzklassen gebildet werden, ist es nötig die Wohldefiniertheit der in (3.1) definierten Abbildung nachzuweisen. Die *Proposition 1* aus [RS80, Abschnitt II.4] liefert einen Beweis hierfür sowie auch für die positive Definitheit des resultierenden Produktes.  $\square$

**Definition 3.4** (Zustandsvektor)

Der Begriff des *Zustandsvektors* stammt aus der Physik, genauer gesagt aus der Quantenmechanik, und bezeichnet dort einen normierten Vektor aus einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$ , der sich dazu eignet, das betrachtete physikalische Objekt (z.B. ein einzelnes Teilchen) zu beschreiben. Die Wahl des zugrundeliegenden Hilbertraums ist dabei durch das zu betrachtende physikalische System bestimmt. Beispielsweise wählt man  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, dx, \mathbb{C}^2)$  ( $dx$  das Lebesgue-Maß) für ein einzelnes quantenmechanisches Teilchen mit Spin  $\frac{1}{2}$  (der Spin ist eine besondere Größe in der Quantenmechanik, zu der keine Entsprechung in der klassischen Physik existiert). Man betrachtet also Tupel  $(\Psi_1(x), \Psi_2(x))$  von quadratintegrierbaren Funktionen  $\Psi_i : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Der einfachste Zustandsraum ist natürlich  $\mathbb{C}$  selbst. In [Mey93, Kapitel 2, Paragraph 1.1] finden sich einige Beispiele, in denen  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$  das physikalische System modelliert. Mehr über Zustände in der Quantenmechanik sowie Erklärungen zum Begriff der damit verknüpften Wellenfunktion findet man in [GHW09]. Dort sind insbesondere die Artikel *States in Quantum Mechanics* und *Wave Function* von Interesse.

**Definition 3.5** (Algebraischer und endlicher Fockraum)

Sei  $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, \langle \cdot | \cdot \rangle)$  ein komplexer Hilbertraum. Wir setzen für  $n \in \mathbb{N}_1$

$$\mathcal{H}^{\otimes n} := \underbrace{\mathcal{H} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}}_{n\text{-mal}}$$

und nennen dies den  $n$ -Teilchenraum. Um diese Familie von Räumen zu vervollständigen, benötigen wir einen zusätzlichen komplexen Vektorraum der Dimension 1, der die Rolle von  $\mathcal{H}^{\otimes 0}$  einnimmt. Dazu betrachten wir

$$\mathcal{H}^{\otimes 0} := \mathbb{C}\Omega = \{\alpha \cdot \Omega : \alpha \in \mathbb{C}\},$$

wobei  $\mathbb{C}\Omega$  ein eindimensionaler *euklidischer*  $\mathbb{C}$ -Vektorraum mit  $\|\Omega\| = 1$  ist. Die Konstruktion eines solchen Raumes ist nach der Theorie der *lineare Algebra* immer möglich. Das Element  $\Omega$  wird später, nach Einbettung in den noch zu konstruierenden Fockraum, mit der Folge  $(\Omega, 0, 0, \dots)$  identifiziert. Damit ist  $\Omega$  der Erzeuger der 0-ten Komponente (wir beginnen die Indizierung der Folge bei *Null*) eines Fockraum-Elementes und wird als sogenannter *Vakuumvektor* bezeichnet. Siehe dazu auch die folgende Bemerkung 3.6.

Ein Element  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n$  aus  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  wird *Elementarvektor* oder auch *Elementartensor* genannt. Der sogenannte *algebraische Fockraum*  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  wird dann als die direkte Summe über alle  $n$ -Teilchenräume, d.h. als

$$\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H}) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{H}^{\otimes n}$$

erklärt. In der Literatur findet man ebenfalls die Definition des *endlichen Fockraums*  $\mathfrak{F}_{\text{finite}}(\mathcal{H})$ , der als der lineare Aufspann aller Elementarvektoren für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  definiert ist:

$$\mathfrak{F}_{\text{finite}}(\mathcal{H}) := \text{span}\{f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n} : n \in \mathbb{N}_0\}$$

Dabei werden die Mengen  $\{f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}\}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$  fest) bereits als eingebettet in die obige direkte Summe verstanden. Natürlich beschreiben diese Definitionen beide das gleiche Objekt, d.h. es gilt  $\mathfrak{F}_{\text{finite}}(\mathcal{H}) = \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ .

Aus diesen Bezeichnungen wird insbesondere deutlich, dass zu diesem Zeitpunkt der Fockraum zunächst ein rein algebraisches Objekt darstellt, welches nur mit einer Vektorraumstruktur

versehen ist. Den Übergang zu einem Hilbertraum werden wir durch die Einführung eines geeigneten Skalarproduktes erhalten. Bei seiner Wahl kann man entweder kanonisch vorgehen oder die  $q$ -Variante betrachten. Die kanonische Konstruktion wird uns den freien Fockraum liefern (Teilchen haben keine Interaktion) und die  $q$ -Variante den  $q$ -deformierten Fockraum, der die freie Variante allerdings als Spezialfall für  $q = 0$  enthält.

Ebenfalls sind zu diesem Zeitpunkt damit weder  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  noch  $\mathfrak{F}_{\text{finite}}(\mathcal{H})$  in irgendeiner Weise *vervollständigt*.

**Bemerkung 3.6** (Vakuumpvektor und die Null in  $\mathcal{H}$ )

Der Vakuumpvektor  $\Omega$ , der auch Vakuumpzustandsvektor oder Vakuumpzustand genannt wird, repräsentiert den Zustand niedrigster Energie des Quantensystems (Nullpunktenergie-Zustand). Im Beispiel des quantenmechanischen harmonischen Oszillators ist der Vakuumpzustand gerade der Grundzustand des Oszillators – dieser befindet sich hier im niedrigsten Anregungszustand und führt nur eine Nullpunktschwingung durch. Wir erinnern uns, dass dies im Widerspruch zum klassischen Modell steht, in dem der Oszillator keinerlei Schwingung mehr durchführt und somit auch die Gesamtenergie des System verschwindet.

Auch soll angemerkt werden, dass man hier den Begriff des Vakuums aus der Quantenmechanik (oder auch Quantenfeldtheorie) betrachtet, der keineswegs einen vollständig leeren Raum beschreibt. Experimente zeigen, dass in einem (klassisch) leeren Raum kontinuierlich sogenannte virtuelle Teilchenpaare entstehen und vernichtet werden, die für die Nullpunktenergie verantwortlich sind. Siehe auch [GHW09, Zero-Point Energy] für weitere Information.

Bei der Wahl des  $\Omega$  muss beachtet werden, dass der Vektor normiert ist, da ansonsten kein Zustandsvektor (siehe Definition 3.4) vorliegt. Da das  $\Omega$  allerdings selbst Element des vollständigen Fockraums werden wird, muss hier präzisiert werden, woher das Element ursprünglich stammt und welche Norm verwendet wird. Nur die Wahl aus Definition 3.5 macht hier Sinn, da es nötig ist, die verschiedenen  $n$ -Teilchenräume auseinanderzuhalten (insbesondere auch  $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega$  und  $\mathcal{H}^{\otimes 1} = \mathcal{H}$ ). Offensichtlich ist diese Unterscheidung nicht mehr möglich, wenn  $\Omega \in \mathcal{H}$  gewählt wird und die Vakuumpkomponente durch den  $\mathbb{C}$ -linearen Aufspann von diesem  $\Omega$  definiert wird. In Bemerkung 3.10 wird die Notwendigkeit dieser *Trennungseigenschaft* deutlich. Wie bereits angemerkt wurde, gilt  $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H}^{\otimes 0} = 1$  und damit  $\mathcal{H}^{\otimes 0} \cong \mathbb{C}$  als Vektorräume. Einige Arbeiten über den Fockraum (siehe z.B. [LM96]) lassen aus diesem Grunde den Vakuumpvektor in der Konstruktion des Fockraums komplett weg und identifizieren  $\mathcal{H}^{\otimes 0}$  sofort mit den komplexen Zahlen.

Außerdem wollen wir anmerken, dass sich der Begriff des Vakuumpzustandsvektors dadurch ergibt, dass der Vektor  $\Omega$  später für die Konstruktion eines Zustandes (im Sinne von  $C^*$ -Algebren, siehe [KR97a, Kapitel 4]) verwendet wird. Die von-Neumann-Algebra, zu der dieser Zustand gehört, wird auf dem Fockraum operieren.

Weiterhin betrachten wir, wie bei direkten Summen allgemein üblich, eine *allgemeine* Null für  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  und die  $n$ -Teilchenräume  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ . Es werden also die Nullen  $0_{\otimes k} \in \mathcal{H}^{\otimes k}$  mit der Null  $(0, 0, \dots) \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  vermöge der kanonischen Inklusionsabbildung  $i : \mathcal{H}^{\otimes k} \hookrightarrow \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  identifiziert.

Wir könnten nun direkt damit beginnen, die  $q$ -Deformation des Fockraums zu definieren, da der freie Fockraum, wie in Definition 3.5 erwähnt, nur ein Spezialfall für  $q = 0$  ist. Allerdings benötigen wir für einige technische, aber dennoch wichtige Details die Definition des *freien* Fockraums. Darüberhinaus ist die freie Variante in vielerlei Hinsicht wesentlich einfacher zu handhaben und bietet sich deshalb als Einstieg an.

**Definition 3.7** (Kanonisches Skalarprodukt und freier Fockraum)

Wir wissen bereits aus Bemerkung 3.3, wie das Skalarprodukt für einfache Tensorprodukte gebildet wird. Durch iterative Fortsetzung erhalten wir somit für jeden  $n$ -Teilchenraum  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  ein eigenes Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_n$ .

Für den Fockraum fordern wir nun, dass Elementarvektoren aus unterschiedlich *großen* Teilchenräumen orthogonal zueinander sind. Außerdem möchten wir, dass die Skalarprodukte der einzelnen  $n$ -Teilchenräume erhalten bleiben. Damit definieren wir

$$\langle x | y \rangle_{\mathfrak{F}} := \begin{cases} 0 & : x \in \mathcal{H}^{\otimes n}, y \in \mathcal{H}^{\otimes m} \text{ mit } n \neq m \\ \langle x | y \rangle_n & : x, y \in \mathcal{H}^{\otimes n} \end{cases}$$

und erweitern dies wieder linear auf den ganzen algebraischen Fockraum  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ . Wir werden im Beispiel 3.18 sehen, dass dieses Skalarprodukt mit dem (noch zu definierenden)  $q$ -Skalarprodukt für  $q = 0$ , also der *freien* Variante, übereinstimmt.

Vervollständigen wir  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  aus Definition 3.5 bzgl. des Produktes  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$ , so liefert dies den bereits erwähnten *freien* Fockraum. Wir bezeichnen diesen vorläufig mit  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$  und werden im Verlauf sehen, dass diese Notation immer noch Sinn macht, wenn man den  $q$ -deformierten Fockraum  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  nennt. Die Wohldefiniertheit und positive Definitheit der Abbildung  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  folgt aus induktiver Anwendung der Ergebnisse aus Bemerkung 3.3.

Der freie Fockraum  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$ , auch als *full Fock space* in der Literatur zu finden, ist das Ausgangsobjekt für die nun folgende  $q$ -Deformation. Mit der Deformation wird versucht, die physikalischen Charakteristika des Systems mathematisch abzubilden:

**Bemerkung 3.8** (Bedeutung des Fockraums in der Physik)

Einsatz findet der Fockraum in der Quantenmechanik. Dabei wählt man meistens den zugrundeliegenden Hilbertraum  $\mathcal{H}$  als den Raum der Wellenfunktionen, die das System beschreiben. Im Kontext der Fockräume ist das System meistens ein (Elementar-)Teilchen und  $\mathcal{H}$  die Menge der Wellenfunktionen, die das Teilchen beschreiben.

Man möchte nun ein System betrachten, welches aus mehreren dieser Teilchen besteht, und in dem sich zudem die Teilchenanzahl ändern kann. In diesem Zusammenhang taucht der Begriff des Erzeugungs- und Vernichtungsoperators auf, der dem Fockraum ein Teilchen hinzufügt bzw. ein Teilchen im Fockraum löscht.

Die Struktur des Fockraums stellt sich als geeignet zur Beschreibung solcher variablen Vielteilchensysteme heraus. Typischerweise werden in der Physik die symmetrisierte bzw. antisymmetrisierte Variante der Fockraums betrachtet. Die Symmetrisierung bzw. Antisymmetrierung kodiert die besondere Eigenschaft der jeweiligen Teilchenwechselwirkung, im Falle von Elementarteilchen die bosonische bzw. fermionische Charakteristika. Beide Varianten werden als Spezialfälle aus der folgenden  $q$ -Deformation hervorgehen und in Bemerkung 3.22 kurz betrachtet werden.

**Definition 3.9** (Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren)

Gegeben den algebraischen Fockraum  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  und ein  $f \in \mathcal{H}$ , definiert man zwei prominente Operatoren  $a^*(f)$  (den Erzeugungsoperator) und  $a(f)$  (den Vernichtungsoperator). Sie symbolisieren das Erzeugen bzw. Vernichten von Teilchen im Fockraum und sind durch die mathematische Betrachtung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators motiviert. Dieser kann sehr elegant durch die Einführung ähnlicher Operatoren behandelt werden, wie wir in Bemerkung 3.11 kurz erläutern werden.

Konkret sind die beiden Operatoren Abbildungen von  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  nach  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ , die durch die

Vorschriften

$$\begin{aligned} a^*(f)\Omega &= f, \\ a^*(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n \end{aligned} \quad (3.2)$$

für den Erzeugungsoperator ( $f_i \in \mathcal{H}$  für alle  $i$ ), und durch

$$\begin{aligned} a(f)\Omega &= 0, \\ a(f)f_1 &= \langle f|f_1 \rangle \Omega, \\ a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f|f_i \rangle f_1 \otimes \dots \otimes \check{f}_i \otimes \dots \otimes f_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

für den Vernichtungsoperator ( $f_i \in \mathcal{H}$  für alle  $i$ ) gegeben sind. Dabei meint  $\check{f}_i$  das Auslassen der  $i$ -ten Komponente im Tensorprodukt. Die zweite Bedingung des Vernichtungsoperators kann prinzipiell weggelassen werden, wenn man das *leere Tensorprodukt* als den Vakuumvektor  $\Omega$  versteht. Die Bedingungen (3.2) sowie (3.3) erklären natürlich nur die Wirkung der Operatoren auf den  $n$ -Teilchenräumen. Da der algebraische Fockraum aber gerade als die direkte Summe über diese  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  definiert war, reicht dies, um die Operatoren danach linear auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  zu erweitern.

Wir haben die Operatoren hier für  $f \in \mathcal{H}$  definiert, also komplexwertige Vektoren zugelassen. Im späteren Verlauf wird man dies einschränken und  $f \in \mathcal{H}_0$  betrachten, wobei  $\mathcal{H}_0$  ein  $\mathbb{R}$ -Hilbertraum ist. Der Fockraum wird dann über der Komplexifizierung  $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} := \mathcal{H}_0 \oplus i\mathcal{H}_0$  (siehe Definition 3.2) konstruiert.

**Bemerkung 3.10** (Verhalten der Operatoren auf Elementarvektoren)

Sei  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  ein Elementarvektor, so bildet für  $f \in \mathcal{H}$  der Erzeugungsoperator  $a^*(f)$  diesen auf den Elementarvektor  $f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$  ab. Ebenso gilt:

$$a(f) : f_1 \otimes \dots \otimes f_n \mapsto \sum_{k=1}^n c_k \underbrace{f_1 \otimes \dots \otimes \check{f}_k \otimes \dots \otimes f_n}_{\in \mathcal{H}^{\otimes(n-1)}} \quad (c_k \in \mathbb{C} \text{ Faktor})$$

Die komplexen Faktoren  $c_k$  setzen sich, wie in Gleichung (3.3) erklärt wurde, aus einem von  $q$  abhängigem Term und einem Skalarprodukt zusammen. Die genaue Form von  $c_k$  ist bei dieser Betrachtung jedoch irrelevant. Offensichtlich bilden also Erzeugungsoperatoren den  $n$ -Teilchenraum auf den  $(n+1)$ -Teilchenraum ab, sowie Vernichtungsoperatoren den  $n$ -Teilchenraum auf den  $(n-1)$ -Teilchenraum:

$$\begin{aligned} a^*(f) : \mathcal{H}^{\otimes n} &\longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes(n+1)} \\ a(f) : \mathcal{H}^{\otimes(n+1)} &\longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes n} \end{aligned}$$

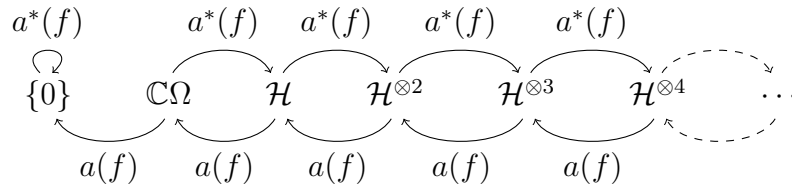
Die obige Vorschrift gilt hierbei für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

Eine Ausnahme für den Vernichtungsoperator gilt es jedoch zu beachten, denn dieser bildet Elemente aus  $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega$  immer auf Null ab:

$$\begin{aligned} a^*(f) : \mathbb{C}\Omega &\longrightarrow \{0\} \\ a(f) : \{0\} &\longrightarrow \{0\} \end{aligned}$$

Wendet man erneut das Beispiel des quantenharmonischen Oszillators an, so hebt  $a^*(f)$  das Energieniveau und  $a(f)$  senkt es. Dazu mehr in der kommenden Bemerkung.

Stellt man das Verhalten der beiden Operatoren grafisch dar, so wird der *Symmetriebruch* bei  $\{0\}$  offensichtlich:



**Bemerkung 3.11** (Motivation der obigen Operatoren)

Die Untersuchung des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik überträgt das Prinzip des harmonischen Oszillators (schwingendes Gewicht an einer Feder) aus der klassischen Physik in die quantisierte Welt. Der Hamiltonoperator hat in diesem Fall die Form

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2,$$

wobei  $m$  die Masse des Teilchens,  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit (*angular frequency*),  $x = \hat{x}$  der Ortsoperator (Positionsoperator) und  $p = \hat{p}$  der Impulsoperator ist.

Ein üblicher Ansatz zur eleganten Lösung der Schrödingergleichung dieses Systems (welche dann die Wellenfunktion liefert) ist die Einführung zweier zueinander adjungierter Operatoren

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x + \frac{i}{m\omega} p \right)$$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( x - \frac{i}{m\omega} p \right),$$

dem Vernichtungsoperator  $a$  und dem Erzeugungsoperator  $a^\dagger$  ( $\dagger$  ist die übliche Bezeichnung des *adjungierten* Operators aus der Quantenmechanik). Dabei ist  $\hbar$  durch  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  gegeben, wobei  $h$  das *Planck'sche Wirkungsquantum* ist ( $\hbar$  ist die sogenannten *reduzierte* Variante).  $h$  ist eine der fundamentalen Naturkonstanten der Quantenmechanik und hat die Dimension *Energie*  $\times$  *Zeit*.

Die Lösung der Schrödingergleichung wird im Allgemeinen eine Familie von Lösungen  $\{\Psi_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$  liefern, die den verschiedenen Anregungszuständen des Oszillators entsprechen. Dabei ist  $\Psi_0$  der Grundzustand des Oszillators, im klassischen Sinne würde das einem nicht ausgelenkten Teilchen an der Feder entsprechen. Man kann nun zeigen, dass die gerade definierten Operatoren Folgendes leisten:

$$a\Psi_n = \sqrt{n}\Psi_{n-1}$$

$$a^\dagger\Psi_n = \sqrt{n+1}\Psi_{n+1}$$

Man sieht hier, dass der Vernichtungsoperator die Wellenfunktion eines Anregungszustandes auf die Wellenfunktion des nächstniedrigeren Zustandes abbildet, analog *erhöht* der Erzeugungsoperator den Anregungszustand. Hierdurch erklärt sich auch die Namensgebung der Operatoren: Der Vernichtungsoperator vernichtet ein Energiequantum im Oszillator, während der Erzeugungsoperator ein Quantum hinzufügt.

Weiterhin kann man zeigen, dass sich mit den beiden Operatoren der Positionsoperator sowie der Impulsoperator durch Linearkombination zurückgewinnen lassen:

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a + a^\dagger)$$

$$p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a^\dagger - a)$$

Darüberhinaus erfüllen die Operatoren die Eigenschaften

$$\hat{H} = \hbar\omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}) \quad \text{sowie} \quad [a, a^\dagger] = 1 ,$$

wobei man  $a^\dagger a = N$  den Besetzungszahloperator nennt. Mit dieser Zerlegung ist nun die Lösung der Schrödingergleichung wesentlich einfacher möglich. Dies soll hier aber nicht weiter verfolgt werden. In [Gri05, Abschnitt 2.3.1] findet man eine ausführliche Abhandlung dieser Methode.

**Lemma 3.12** ( $q$ -Vertauschungsrelation)

Die in Definition 3.9 eingeführten Operatoren genügen der sogenannten  $q$ -Vertauschungsrelation

$$a(f)a^*(g) - qa^*(g)a(f) = \langle f|g \rangle \cdot \mathbf{1} ,$$

wobei  $f, g \in \mathcal{H}$  sind und  $\mathbf{1}$  die Identität auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  ist.

Wie bereits in der Einleitung angemerkt, wurde diese  $q$ -deformierte Vertauschungsrelation erstmalig in [Gre91] verwendet, um kleine Abweichungen von den jeweiligen Wechselwirkungscharakteristika der Teilchen zuzulassen.

*Beweis.* Es reicht die Eigenschaften für alle  $f_1 \otimes \dots \otimes f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$  (für  $n \in \mathbb{N}_1$  beliebig) zu zeigen. Definiere zusätzlich  $g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \in \mathcal{H}^{\otimes(n+1)}$  durch

$$g_i := \begin{cases} g & : i = 1 \\ f_{i-1} & : i \geq 2 \end{cases}$$

und betrachte

$$\begin{aligned} a(f)a^*(g)f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= a(f)g \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n = a(f)g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} q^{i-1} \langle f|g_i \rangle g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_{n+1} \\ &= q^{1-1} \langle f|g_1 \rangle g_2 \otimes \dots \otimes g_{n+1} + \sum_{i=2}^{n+1} q^{i-1} \langle f|g_i \rangle g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_{n+1} \\ &= q^0 \langle f|g \rangle f_1 \otimes \dots \otimes f_n + \sum_{i=1}^n q^{i+1-1} \langle f|g_{i+1} \rangle g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_{i+1} \otimes \dots \otimes g_{n+1} \\ &= \langle f|g \rangle f_1 \otimes \dots \otimes f_n + q \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f|f_i \rangle g \otimes f_1 \otimes \dots \otimes \check{f}_i \otimes \dots \otimes f_n \\ &= \langle f|g \rangle f_1 \otimes \dots \otimes f_n + qa^*(g)a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n . \end{aligned}$$

Für das Vakuum  $\mathcal{H}^{\otimes 0}$  ist die Aussage klar, also folgt aus der obigen Rechnung direkt

$$a(f)a^*(g)f_1 \otimes \dots \otimes f_n - qa^*(g)a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \langle f|g \rangle f_1 \otimes \dots \otimes f_n$$

und unter Verwendung der Linearität der beiden Operatoren  $a(f)$ ,  $a^*(g)$  die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 3.13** (Spezialfälle der  $q$ -Vertauschungsrelation)

Für die Spezialfälle  $q = 1$  und  $q = -1$  sind die Vertauschungsrelationen unter den Begriffen CCR (für *canonical commutation relation*) bzw. CAR (*canonical anticommutation relation*) bekannt. Die Namensgebung ergibt sich durch die Formulierung der Relation durch den Kommutator

$$[a(f), a^*(g)] = \langle f|g \rangle \cdot \mathbf{1}$$

im Falle der CCR bzw. durch den Antikommutator

$$[a(f), a^*(g)]_- = \langle f|g \rangle \cdot \mathbf{1}$$

im Falle der CAR. Im physikalischen Kontext spricht man auch von der bosonischen (CCR) bzw. fermionischen (CAR) Relation.

**Definition 3.14** ( $q$ -deformiertes Skalarprodukt)

Wir fordern bei der Definition des  $q$ -deformierten Skalarproduktes, dass die bereits definierten Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zueinander adjungiert sind. Dazu betrachten wir das  $q$ -Skalarprodukt von zwei Elementarvektoren

$$\begin{aligned} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_n \rangle_q &\stackrel{(1)}{=} \langle a^*(f_1)f_2 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_n \rangle_q \\ &\stackrel{(2)}{=} \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_n, a(f_1)g_1 \otimes \dots \otimes g_n \rangle_q \\ &\stackrel{(3)}{=} \left\langle f_2 \otimes \dots \otimes f_n, \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f_1|g_i \rangle g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_n \right\rangle_q \\ &\stackrel{(4)}{=} \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f_1|g_i \rangle \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_n \rangle_q, \end{aligned}$$

wobei wir hier unter anderem implizit die geforderte Eigenschaft ausnutzen:

- (1) Definition 3.9 des Erzeugungsoperators  $a^*(f_1)$
- (2) Die Operatoren  $a^*(f_1)$  und  $a(f_1)$  sollen hermitsch adjungiert sein.
- (3) Definition 3.9 des Vernichtungsoperators  $a(f_1)$
- (4)  $\mathbb{C}$ -Linearität des Skalarproduktes in der zweiten Komponenten (Bemerkung 3.1)

Auf diese Weise lässt sich also das  $q$ -Skalarprodukt von zwei Elementarvektoren der Länge  $n$ , d.h. mit  $n$  Tensorkomponenten, auf die Skalarprodukte von Vektoren der Länge  $n-1$  zurückführen. Es bietet sich an, einen iterativen Ansatz zu wählen und das  $q$ -Skalarprodukt von zwei Vektoren der Länge 1 (also aus  $\mathcal{H}^{\otimes 1}$ ) über das Skalarprodukt des Hilbertraums  $\mathcal{H}$  zu definieren.

Dies liefert uns also folgende allgemeine (vorerst rekursive) Definition auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ :

$$\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_m \rangle_q := \delta_{n,m} \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f_1|g_i \rangle \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_n \rangle_q$$

Insbesondere soll hier  $\langle f_1, g_1 \rangle_q := \langle f_1|g_1 \rangle_{\mathcal{H}}$  gelten. In Bemerkung 3.16 werden wir kurz erläutern, warum dieses auf Tensorprodukten definierte Abbildung wohldefiniert ist. Auch werden wir erst später in Bemerkung 3.17 zeigen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  tatsächlich ein Skalarprodukt definiert.

**Satz 3.15** ( $q$ -Deformation des Skalarproduktes mit der  $S_n$ )

Das Skalarprodukt aus der Definition 3.14 kann ebenfalls direkt ausgeschrieben werden, ohne Umwege über eine rekursive Vorschrift. Dabei summiert man wie folgt über alle Permutationen der symmetrischen Gruppe  $S_n$ :

$$\begin{aligned} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_m \rangle_q &= \delta_{n,m} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \langle f_1|g_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle f_n|g_{\pi(n)} \rangle \\ &= \delta_{n,m} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^n \langle f_j|g_{\pi(j)} \rangle \end{aligned}$$



In dieser neuen Darstellung ist es außerdem möglich, das  $q$ -Skalarprodukt über das kanonische Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  aus Definition 3.7 und einen Deformationsoperator auf dem algebraischen Fockraum  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  zu erklären. Wir definieren diesen Operator  $P_q$  durch

$$P_q \Omega = \Omega$$

$$P_q f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)}$$

und erweitern wie üblich linear auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ . Offensichtlich gilt also  $P_q(\mathcal{H}^{\otimes n}) \subseteq \mathcal{H}^{\otimes n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und somit erhält  $P_q$  die  $n$ -Teilchenstruktur von  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ . Wir können nun wegen

$$\begin{aligned} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n | P_q g_1 \otimes \dots \otimes g_n \rangle_{\mathfrak{F}} &= \sum_{\pi \in S_n} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n | q^{i(\pi)} g_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes g_{\pi(n)} \rangle_{\mathfrak{F}} \\ &= \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{i=1}^n \langle f_i | g_{\pi(i)} \rangle \end{aligned}$$

das  $q$ -Skalarprodukt als  $\langle \xi, \eta \rangle_q = \langle \xi | P_q \eta \rangle_{\mathfrak{F}}$  schreiben, wobei  $\xi, \eta \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  sind.

In [BS91, Lemma 4] wird gezeigt, dass für festes  $n \in \mathbb{N}_1$  der eingeschränkte Operator  $P_q^{(n)} := P_q|_{\mathcal{H}^{\otimes n}}$  die Norm  $\|P_q\| = [n]_q!$  besitzt. Wir betrachten also  $P_q$  auf dem Raum  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ , welcher bzgl. der in 3.7 erklärten Norm vervollständigt wird.

Für den gesamten freien Fockraum  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$  gilt diese Aussage im Allgemeinen nicht mehr. Auf diesem ist der Operator  $P_q$  für  $q > 0$  unbeschränkt (man betrachte den Ausdruck  $[n]_q!$  für  $n \rightarrow \infty$  wenn  $q > 0$ ).

Man beachte auch, dass wegen  $S_1 = \{\text{id}\}$  der Operator  $P_q$  eingeschränkt sowohl auf  $\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega$  als auch auf  $\mathcal{H}$  die Identität ist. Auf dem Vakuum- und dem 1-Teilchenraum findet also keine Deformation statt. Erst bei zwei oder mehr Teilchen kommt es zu einer Deformation des kanonischen freien Produktes.

**Bemerkung 3.16** (Wohldefiniertheit des Operators  $P_q$ )

Wie bereits erwähnt respektiert  $P_q$  die  $n$ -Teilchenraumstruktur, es reicht damit

$$P_q|_{\mathcal{H}^{\otimes n}} : \mathcal{H}^{\otimes n} \longrightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$$

für festes  $n \in \mathbb{N}_0$  zu betrachten. Definiere  $\tilde{P}_q : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^n$  auf dem  $n$ -fachen kartesischen Produkt von  $\mathcal{H}$  (versehen mit der von  $\mathcal{H}$  induzierten Vektorraumstruktur) durch

$$(h_1, \dots, h_n) \longmapsto \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} (h_{\pi(1)}, \dots, h_{\pi(n)}) .$$

Offensichtlich ist dies eine wohldefinierte Abbildung. Sei  $\otimes : \mathcal{H}^n \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$  die kanonische Tensorabbildung, die durch

$$\otimes : (h_1, \dots, h_n) \longmapsto h_1 \otimes \dots \otimes h_n$$

gegeben ist, so erhalten wir das folgende kommutierende Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^n & \xrightarrow{\tilde{P}_q} & \mathcal{H}^n \\ \otimes \downarrow & \searrow \otimes \circ \tilde{P}_q & \downarrow \otimes \\ \mathcal{H}^{\otimes n} & \xrightarrow{\exists! P_q} & \mathcal{H}^{\otimes n} \end{array}$$

Es existiert also eine eindeutige Abbildung  $P_q : \mathcal{H}^{\otimes n} \rightarrow \mathcal{H}^{\otimes n}$ , die die Relation  $P_q \circ \otimes = \otimes \circ \tilde{P}_q$  erfüllt. Damit ist also  $P_q$  auf ganz  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  wohldefiniert. Wir haben also:

- (i) Das kanonische Skalarprodukt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  ist auf  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$  wohldefiniert (siehe Definition 3.7).
- (ii) Der Deformationsoperator  $P_q$  ist für alle  $q \in [-1, 1]$  wohldefiniert.

Durch Zusammensetzen der beiden Abbildungen in (i) und (ii) folgt also direkt die Wohldefiniertheit des  $q$ -deformierten Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ .

*Beweis von Satz 3.15.* Der Fall  $n \neq m$  ist klar, sei also nun  $n = m$ . Für  $n = 1$  ist die Behauptung trivial, da  $P_q^{(1)} = 1$  ist. Sei nun die Behauptung bereits für  $n$  gezeigt und  $f_i, g_j \in \mathcal{H}$  gewählt. Dann reicht es

$$\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_{n+1}, g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \rangle_q = \sum_{\pi \in S_{n+1}} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^{n+1} \langle f_j | g_{\pi(j)} \rangle$$

nachzurechnen. Setze dazu

$$S_{n,k} := \{ \alpha : \{2, \dots, n+1\} \rightarrow \{1, \dots, \hat{k}, \dots, n+1\} \mid \alpha \text{ bijektiv} \} \cong S_n,$$

so kann jedes  $\pi \in S_{n+1}$  durch ein  $\sigma \in S_{n,k}$  geschrieben werden (mit  $\hat{k}$  ist wie üblich das Auslassen des Eintrags gemeint). Dafür setze  $k := \pi(1)$  und definiere  $\sigma$  durch die Vorschrift  $\sigma(i) = \pi(i)$  für alle  $i \in \{2, \dots, n+1\}$ . Analog zum Beweis von Lemma 2.3 kann man auch hier eine Formel für die Änderung der Fehlstellungsstatistik  $i(\cdot)$  angeben, wenn man von  $\pi$  zu  $\sigma$  übergeht. Die Formel lautet bei dieser Konstruktion  $i(\pi) = i(\sigma) + (k-1)$ . Da die Menge  $\bigcup_{k=1}^{n+1} S_{n,k}$  eine disjunkte Vereinigung ist und wieder die gesamte symmetrische Gruppe  $S_{n+1}$  ergibt, folgt

$$\begin{aligned} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_{n+1}, g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \rangle_q &\stackrel{\text{Def. 3.14}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} q^{i-1} \langle f_1 | g_i \rangle \langle f_2 \otimes \dots \otimes f_{n+1}, g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_{n+1} \rangle_q \\ &\stackrel{\text{I.V.}}{=} \sum_{i=1}^{n+1} q^{i-1} \langle f_1 | g_i \rangle \sum_{\sigma \in S_{n,i}} q^{i(\sigma)} \prod_{j=2}^{n+1} \langle f_j | g_{\sigma(j)} \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{\sigma \in S_{n,i}} q^{i(\sigma)+(i-1)} \langle f_1 | g_i \rangle \prod_{j=2}^{n+1} \langle f_j | g_{\sigma(j)} \rangle \\ &= \sum_{\pi \in S_{n+1}} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^{n+1} \langle f_j | g_{\pi(j)} \rangle \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

### Bemerkung 3.17 (Eigenschaften des $q$ -Skalarproduktes)

Für die in 3.14 definierte Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  war noch offen, ob alle Eigenschaften eines Skalarproduktes erfüllt waren. In Satz 3.15 hatten wir eine *einfachere* Darstellung der Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  angegeben und dazu einen Operator  $P_q$  auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ , dem in Definition 3.5 eingeführten algebraischen Fockraum, definiert. Die Frage nach der positiven Definitheit lässt sich damit auf die Fragestellung zurückführen, ob durch  $P_q$  ein strikt positiver Operator definiert ist.

Man kann nun zeigen, dass  $P_q$  auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  für  $q \in [-1, 1]$  positiv ist, d.h. die Eigenschaft

$$\forall x \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H}) \quad : \quad \langle x | P_q x \rangle_{\mathfrak{F}} \geq 0 \quad (*)$$

erfüllt, wobei  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  das zu  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$  gehörige innere Produkt ist. Schränkt man den Interpolationsbereich auf  $q \in (-1, 1)$  ein, so ist der Operator sogar strikt positiv, d.h.  $\langle x | P_q x \rangle_{\mathfrak{F}} > 0$  in (\*) falls  $x \neq 0$  gewählt wird. Den Beweis zur Positivität bzw. strikten Positivität findet man in [BS91, Proposition 1].

Aus Definition 3.7 sind die nötigen Eigenschaften von  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  bekannt, also folgt für  $q \in (-1, 1)$  mit den obigen Aussagen, dass  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  positiv definit ist. Wie man leicht sieht, überträgt sich durch die Darstellung mit  $P_q$  auch die Linearität sowie die konjugierte Symmetrie auf  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$ , womit dieses alle geforderten Eigenschaften erfüllt. Wir klammern die Randfälle  $q = 1$  und  $q = -1$  vorerst aus, da die Behandlung dieser Fälle die Beachtung einiger weiterer technischer Details erfordert.

Weiterhin gilt wegen  $i(\pi) = i(\pi^{-1})$  für alle  $\pi \in S_n$  die Darstellung

$$\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_m \rangle_q = \delta_{n,m} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^n \langle f_{\pi(j)} | g_j \rangle, \quad (**)$$

es spielt also keine Rolle, ob man im Skalarprodukt die erste oder die zweite Komponente permutiert bzw. fixiert.

Da wir den  $q$ -Fockraum immer über einem komplexen Hilbertraum konstruieren, folgt aus der Positivität von  $P_q$  bereits die Selbstadjungiertheit des Operators. Allerdings liefert die Darstellung (\*\*) ebenfalls einen Beweis dafür, dass  $P_q$  ein selbstadjungiert ist, auch ohne Verwendung des Spektralkalküls:

Zeige also  $\langle P_q x | y \rangle_{\mathfrak{F}} = \langle x | P_q y \rangle_{\mathfrak{F}}$  für beliebige  $x, y$  aus  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$ . Dann reicht es, diese Aussage für  $x, y$  der Form  $x = f_1 \otimes \dots \otimes f_n$ ,  $y = g_1 \otimes \dots \otimes g_n$  nachzuweisen. Mit dieser Wahl folgt nun

$$\begin{aligned} \langle x | P_q y \rangle_{\mathfrak{F}} &= \langle x, y \rangle_q \stackrel{(**)}{=} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \langle f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)} | y \rangle_{\mathfrak{F}} \\ &= \left\langle \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)} \middle| y \right\rangle_{\mathfrak{F}} = \langle P_q x | y \rangle_{\mathfrak{F}} \end{aligned}$$

und somit die Selbstadjungiertheit von  $P_q$ .

### Beispiel 3.18 (Freies ( $q = 0$ ) $q$ -Skalarprodukt)

Für  $q = 0$  geben nur die Summanden des Skalarprodukts

$$\delta_{n,m} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^n \langle f_j | g_{\pi(j)} \rangle$$

einen Beitrag, bei denen  $q^{i(\pi)} \neq 0$  gilt. Dieser Fall tritt offensichtlich nur dann ein, wenn die Permutation  $\pi \in S_n$  die Bedingung

$$\begin{aligned} i(\pi) = 0 &\Leftrightarrow \pi \text{ besitzt keine Fehlstellungen} \\ &\Leftrightarrow \pi = \text{id} \end{aligned}$$

erfüllt. Damit folgt  $\langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_m \rangle_q = \prod_{j=1}^n \langle f_j | g_j \rangle$  und somit ist  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q = \langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  ( $q = 0$ ) aus Definition 3.7. Eine andere Variante dies zu sehen, ist den Operator  $P_q$  aus Satz 3.15 zu betrachten. Für  $q = 0$  vereinfacht sich dieser zur Identität und man erhält ebenfalls das kanonische Skalarprodukt zurück.

**Definition 3.19** ( $q$ -deformierter Fockraum)

Der  $q$ -deformierte Fockraum  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ , auch als  $q$ -Fockraum bezeichnet, wird nun als die Vervollständigung von  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  bzgl. des oben untersuchten Skalarproduktes  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  gesetzt.

Die bereits bekannten Operatoren  $a^*(f)$  und  $a(f)$  für  $f \in \mathcal{H}$  werden stetig linear auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  fortgesetzt und sind dort bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  zueinander adjungiert. Sie erfüllen damit die Eigenschaften der Operatoren, die bei der Untersuchung des quantenharmonischen Oszillators auftauchen. Die  $q$ -Vertauschungsrelation aus Lemma 3.12 bleibt für die fortgesetzten Operatoren erhalten.

*Beweis.* Für die Adjungiertheit der Operatoren  $a^*(f)$  und  $a(f)$  reicht es für beliebige  $n \in \mathbb{N}$  und Elemente  $f_i, g_j \in \mathcal{H}$  die Relation

$$\langle a^*(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n, g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \rangle_q = \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, a(f)g_1 \otimes \dots \otimes g_{n+1} \rangle_q$$

nachzuprüfen. Aber dies ist klar, da das  $q$ -Skalarprodukt in 3.14 gerade so konstruiert wurde. Die Aussage über die  $q$ -Vertauschungsrelation ist offensichtlich.  $\square$

**Bemerkung 3.20** (Eigenschaften der Operatoren  $a^*(f)$  und  $a(f)$ )

Wir betrachten erneut die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, die bereits bei der Definition des  $q$ -Skalarproduktes eine zentrale Rolle gespielt haben.

Für  $q \in [-1, 1)$  ist  $a^*(f)$  (mit  $f \in \mathcal{H}$ ) ein beschränkter Operator (bzgl. der von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  induzierten Norm) und es gilt zusätzlich

$$\|a^*(f)\|_q = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-q}} \|f\|_{\mathcal{H}} & : q \in [0, 1) \\ \|f\|_{\mathcal{H}} & : q \in [-1, 0) . \end{cases}$$

Die Operatornorm hängt also in sehr einfacher Weise von der Norm der *erzeugenden* Elemente ab. Wegen  $\|a^*(f)\|_q = \|a(f)\|_q$  gelten die Aussagen auch für den Vernichtungsoperator und insbesondere für die Summe der beiden, die im folgenden betrachtet wird.

Der Fall  $q = 1$  ist außergewöhnlich: Die Operatoren sind in diesem Fall unbeschränkt, bleiben aber dennoch zueinander adjungiert (siehe die dem Beweis von [BS91, Lemma 4] folgende Bemerkung sowie den Abschnitt 2.3 (*The  $q$ -Fock Space*) in [Ans01]).

*Beweis.* Für die Aussage über die Operatornorm siehe [BS91, Lemma 4].  $\square$

**Bemerkung 3.21** (Die Operatoren im Spezialfall  $q = 0$ )

Die Operatoren aus 3.9 haben im Fall  $q = 0$  eine sehr einfache Form:

$$\begin{aligned} a^*(f)\Omega &= f , \\ a(f)\Omega &= 0 , \\ a^*(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_n , \\ a(f)f_1 &= \langle f|f_1 \rangle \Omega , \\ a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n &= \langle f|f_1 \rangle f_2 \otimes \dots \otimes f_n \quad (n \geq 2) \end{aligned}$$

Dabei sollen wie üblich  $f$  sowie die  $f_i$  aus  $\mathcal{H}$  stammen. Eine weitere interessante Eigenschaft für diesen Fall ist die Struktur der Vertauschungsrelation aus Lemma 3.12, die sich zu

$$a(f)a^*(g) = \langle f|g \rangle \cdot \mathbb{1} \tag{*}$$

reduziert. Haben wir also ein beliebiges Produkt von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren, d.h. einen Ausdruck

$$\prod_{i=1}^N b_i \quad \text{mit} \quad b_i \in \{a(f_i), a^*(f_i)\} \quad \text{für} \quad \{f_j\}_{j=1}^N \subseteq \mathcal{H}$$

gegeben, so kann dieser durch iterative Anwendung von (\*) in die einfache Form

$$\lambda \cdot \prod_{i=1}^{N_1} a^*(g_i) \prod_{i=1}^{N_2} a(h_i) \quad \text{mit} \quad \{g_j\}_{j=1}^{N_1}, \{h_j\}_{j=1}^{N_2} \subseteq \{f_j\}_{j=1}^N, \lambda \in \mathbb{C}$$

gebracht werden, in der man die beiden Operortypen auf zwei Seiten *getrennt* hat. Wir werden später noch einmal auf diesen Aspekt zurückkommen, wenn es um die *freie Unabhängigkeit* im  $q$ -Fockraum mit  $q = 0$  geht.

**Bemerkung 3.22** (Die Randfälle  $q = -1$  und  $q = 1$ )

In Bemerkung 3.17 hatten wir bereits darauf hingewiesen, dass für die *deformierende* Operator  $P_q$  nicht mehr strikt positiv ist. Es existieren also  $x \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  mit  $x \neq 0$  aber  $\langle x | P_q x \rangle_{\mathfrak{F}} = 0$ , womit  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  natürlich kein Skalarprodukt mehr ist und insbesondere nur noch eine Halbnorm induziert.

Nun ist  $P_q$  aber weiterhin positiv, also existiert nach Spektralkalkül ein positiver selbstadjungierter Operator  $A$ , derart dass  $A^2 = P_q$  ist. Mit festem  $x \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  folgt

$$0 = \langle x | P_q x \rangle_{\mathfrak{F}} = \langle x | A^2 x \rangle_{\mathfrak{F}} \stackrel{\text{A s.a.}}{=} \langle Ax | Ax \rangle_{\mathfrak{F}} = \|Ax\|_{\mathfrak{F}}^2 \Rightarrow Ax = 0 \Rightarrow P_q x = 0.$$

Also gilt  $\langle x | P_q x \rangle_{\mathfrak{F}} = 0$  genau dann, wenn  $x \in \text{Kern}(P_q)$ . Für  $q = \pm 1$  reicht es also aus, aus  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  den Kern von  $P_q$  herauszuteilen, bevor bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  vervollständigt wird.

Der Deformationsoperator  $P_q$  hat in den Randfällen die Form

$$P_{\pm 1} f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \sum_{\pi \in S_n} (\pm 1)^{i(\pi)} f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)},$$

geht also bis auf einen von  $n$  abhängigen Skalierungsfaktor in den Symmetrisierungs- bzw. Antisymmetrisierungsoperator

$$S_{\pm} f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in S_n} (\pm 1)^{i(\pi)} f_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes f_{\pi(n)}$$

über (siehe [GHW09, Creation and Annihilation Operators]). Betrachtet man  $P_1(\mathcal{H}^{\otimes n})$ , so ist dies der Unterraum des  $n$ -Teilchenraums, der invariant unter Vertauschung von zwei Teilchen ist. Damit ist  $P_1(\mathcal{H}^{\otimes n})$  sogar invariant unter beliebigen Permutationen der Teilchen, kodiert also genau die charakteristische Eigenschaft von Bosonen: Ist  $\Psi$  die Wellenfunktion zu einem System von  $n$  Bosonen, so sind diese  $n$  Teilchen nach Aussage der Quantenmechanik nicht unterscheidbar und das *Tauschen* zweier Teilchen hat keine Auswirkung auf die Wellenfunktion. Der  $q$ -Fockraum geht somit für  $q = 1$  in den sogenannten symmetrischen Fockraum über.

Auf der anderen Seite haben wir den Fall  $q = -1$ , dort kodiert der Operator  $P_{-1}$  die Eigenschaft der fermionischen Teilchen: Das Tauschen zweier Teilchen resultiert dort in einem Vorzeichen der Wellenfunktion  $\Psi$ , wird also durch den Term  $(-1)^{i(\pi)}$  realisiert (denn für einen Tausch ist  $\pi$  eine Transposition, also  $i(\pi) = 1$ ). Das  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  geht somit für  $q = -1$  in den antisymmetrischen Fockraum über.

In beiden Fällen unterscheidet sich das jeweilige innere Produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\pm 1}$  auf dem  $k$ -Teilchenraum nur durch einen Faktor  $k!$  von demjenigen Produkt, welches üblicherweise in der Physik zum Fockraum  $\mathfrak{F}_{\pm 1}(\mathcal{H})$  gehört.

Mit Satz 3.15 sieht man unter anderem, dass  $\|S_{\pm}\| = 1$  gilt. Mit den Eigenschaften

- (i)  $\pi(S_n) = S_n$  für alle  $\pi \in S_n$
- (ii)  $\text{sign}(\pi) = (-1)^{i(\pi)}$
- (iii) Die Signum-Funktion ist multiplikativ.

folgt weiterhin, dass  $S_\pm$  Projektionsoperatoren sind, d.h.  $S_\pm^2 = S_\pm$  gilt. Diese Aussage ist für  $P_{\pm 1}$  nicht mehr richtig, da dort die entsprechende Normierung durch den Faktor  $\frac{1}{n!}$  wegfällt.

**Bemerkung 3.23** (Erzeugungs- und Vernichtungsoperator für die Randfälle)

In 3.19 hatten wir erwähnt, dass die Operatoren  $a^*(f)$ ,  $a(f)$  zur Definition auf dem  $q$ -Fockraum stetig linear von  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  fortgesetzt werden. Dies gilt natürlich nur für einen Parameter  $q \in (-1, 1)$  und wie aus Bemerkung 3.22 zu erwarten ist, benötigt man in den Randfällen  $q = \pm 1$  einen zusätzlichen Schritt:

Dabei reicht es aus, die Operatoren auf den jeweiligen unter  $P_{\pm 1}$  invarianten Unterraum zu *komprimieren*. Genauer betrachten wir wie in 3.22 das Bild  $\mathcal{K} := P_q(\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H}))$  (dabei soll  $q = \pm 1$  fest gewählt sein) und betrachten  $T_{\mathcal{K}}$  die orthogonale Projektion bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  auf diesen Unterraum  $\mathcal{K}$  (das  $T_{\mathcal{K}}$  ist gerade durch den Operator  $S_\pm$  aus Bemerkung 3.22 gegeben). Anstatt  $a^*(f)$  und  $a(f)$  werden nun die Operatoren

$$b^*(f) := T_{\mathcal{K}}a^*(f)|_{\mathcal{K}}, \quad b(f) := T_{\mathcal{K}}a(f)|_{\mathcal{K}}$$

betrachtet. Auf  $\mathfrak{F}_{\pm 1}(\mathcal{H})$  nehmen also für  $f \in \mathcal{H}$  die komprimierten Operatoren  $b^*(f)$  und  $b(f)$  die Rolle des Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperators ein. Für  $q = -1$  können die Operatoren weiterhin stetig linear auf  $\mathfrak{F}_{-1}(\mathcal{H})$  fortgesetzt werden, für  $q = 1$  hingegen erhält man unbeschränkte Operatoren mit Definitionsbereich  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  (siehe Bemerkung 3.20 über die Norm der Operatoren).

**Definition 3.24** (Gewichteter Folgenraum)

Sei eine reelle Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit  $a_n > 0$  gegeben, dann definieren wir die *gewichtete* Variante des  $l_2$ -Raumes als

$$l_2(\mathbb{N}, (a_n)_n) := \{b = (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \|b\|_{2, (a_n)_n} < \infty\}$$

mit

$$\|b\|_{2, (a_n)_n} := \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|^2 a_k.$$

Die Folge  $(a_n)_n$  stellt also Gewichte für die Norm dar.

**Beispiel 3.25** (Einfachste Variante eines  $q$ -Fockraums)

Für die Wahl  $\mathcal{H} = \mathbb{C}$  vereinfacht sich der  $q$ -Fockraum zu

$$\mathfrak{F}_q(\mathbb{C}) \cong l_2(\mathbb{N}, ([n]_q!)_n).$$

*Beweis.* Wir betrachten zuerst die Vektorraumstruktur von  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ . Wegen  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}$  vereinfacht sich diese zu

$$\mathfrak{F}_q(\mathcal{H}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes k} = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0},$$

wir betrachten also nur Folgen mit Werten in  $\mathbb{C}$ . Seien nun  $a_1 \otimes \dots \otimes a_k, b_1 \otimes \dots \otimes b_k \in \mathcal{H}^{\otimes k}$  dann gilt

$$\begin{aligned} \langle a_1 \otimes \dots \otimes a_k, b_1 \otimes \dots \otimes b_k \rangle_q &= \sum_{\pi \in S_k} q^{i(\pi)} \overbrace{\langle a_1 | b_{\pi(1)} \rangle \cdots \langle a_k | b_{\pi(k)} \rangle}^{=\overline{a_1} b_{\pi(1)} \cdots \overline{a_k} b_{\pi(k)}} \\ &= \sum_{\pi \in S_k} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^k \overline{a_j} b_j = \left( \prod_{j=1}^k \overline{a_j} b_j \right) \cdot \underbrace{\sum_{\pi \in S_k} q^{i(\pi)}}_{=[k]_q!} \\ &= [k]_q! \cdot \prod_{j=1}^k \langle a_j | b_j \rangle. \end{aligned}$$

Die Wohldefiniertheit von  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  ist bekannt, also ist dieses Resultat unabhängig von der *Darstellung* der Tensoren. Wir fixieren nun  $k \in \mathbb{N}_0$  und erhalten so wegen  $\mathcal{H}^{\otimes k} \cong \mathbb{C}$  für  $a, b \in \mathbb{C}$  das Skalarprodukt  $\langle a, b \rangle_q = [k]_q! \cdot a \bar{b}$ , wobei  $\bar{b}$  die komplexe Konjugation ist. Der Parameter  $k$  wird später implizit durch den Folgenindex vorgegeben, an dem das  $a$  bzw.  $b$  zu finden ist.

Wir identifizieren den Elementarvektor

$$a_1 \otimes \dots \otimes a_k \hat{=} (0, \dots, 0, \underbrace{a_1 \cdots a_k}_{k\text{-te Stelle}}, 0, 0, \dots) \quad (k \in \mathbb{N}_1)$$

also mit einer *Elementarfolge* aus  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ . Man beachte, dass aus diesem Grunde in der obigen Darstellung die Vakuumkomponente an der Stelle  $k = 0$  der Folge geschrieben wird. Allgemeiner erhalten wir für  $\lambda \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$  die Identifikation

$$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots) \hat{=} \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \quad \text{mit} \quad \xi_0 = \alpha \cdot \Omega, \quad \xi_k = \bigotimes_{j=1}^k \xi_{k,j} \quad (k \geq 1), \quad (3.4)$$

wobei  $\xi_{k,j}, \alpha \in \mathbb{C}$  sind. Die Reihe ist zunächst als formales Objekt anzusehen. Wir werden jedoch sehen, dass für  $\lambda \in l_2(\mathbb{N}, ([n]_q!)_n)$  die Reihe bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_q$  konvergiert. In der Tat ist die Eigenschaft  $\|\lambda\|_{2,([n]_q!)_n} < \infty$  äquivalent zu  $\|\lambda\|_q < \infty$ , wobei in der ersten Ungleichung  $\lambda$  als Folge interpretiert ist und in der zweiten als Element des  $q$ -Fockraums.

Nach obiger Rechnung erhalten wir für das Element  $\xi_k = \xi_{k,1} \otimes \dots \otimes \xi_{k,k}$  die Norm  $\|\xi_k\| = [k]_q! \cdot |\xi_k|^2$ . Setzt man nun die Identifikation aus (3.4) in  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  ein, so liefert dies schließlich

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_q &= \left\langle \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k, \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k \right\rangle_q = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \langle \xi_{k_1}, \xi_{k_2} \rangle_q \\ &\stackrel{(*)}{=} \langle \xi_0, \xi_0 \rangle_q + \sum_{k=1}^{\infty} \left\langle \bigotimes_{j=1}^k \xi_{k,j}, \bigotimes_{j=1}^k \xi_{k,j} \right\rangle_q = |\alpha|^2 + \sum_{k=1}^{\infty} [k]_q! \cdot |\xi_k|^2, \end{aligned}$$

wobei wir in (\*) die Orthogonalität der  $n$ -Teilchenräume verwendet haben. Dies ist jedoch genau die Definition der Norm für gewichtete Folgen in Definition 3.24.  $\square$

**Definition 3.26** (Positionsoperatoren und die davon erzeugte Algebra)

An dieser Stelle betrachten wir einen  $\mathbb{R}$ -Hilbertraum  $\mathcal{H}_0$  und setzen  $\mathcal{H}$  als den komplexifizierten

(nach Definition 3.2) Hilbertraum. Sei  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  der  $q$ -Fockraum zu  $\mathcal{H}$ , wie er in Definition 3.19 eingeführt wurde. Zu  $f \in \mathcal{H}_0$  definieren wir den Positionoperator

$$w(f) := a^*(f) + a(f) \in B(\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})) ,$$

wobei  $a^*(f)$  und  $a(f)$  die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren aus Definition 3.9 sind.  $B(\mathfrak{F}_q(\mathcal{H}))$  bezeichnet wie üblich die Menge der beschränkten linearen Operatoren auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ . Nach Bemerkung 3.20 und wegen  $q \in (-1, 1)$  ist  $w(f)$  in der Tat beschränkt. Weiterhin ist  $f \mapsto w(f)$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare (allerdings nicht  $\mathbb{C}$ -lineare) Abbildung, damit sind also insbesondere Summen von  $w(f_i)$  wieder Positionoperatoren. Die  $\mathbb{R}$ -Linearität folgt aus der Tatsache, dass  $a^*(f)$   $\mathbb{C}$ -linear ist,  $a(f)$  hingegen nur konjugiert  $\mathbb{C}$ -linear.

Die Positionoperatoren übernehmen im Folgenden die Rolle der Zufallsvariablen mit Gauß-Verteilung aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie, stellen also eine Art verallgemeinerte Gauß'sche Zufallsvariable dar (wir kürzen sie als  $q$ -GZV ab). Eine formale Definition des Begriffes *Verteilung* für dieses verallgemeinerte Objekt werden wir allerdings erst in Definition 5.20 liefern.

Man setzt  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0) := \text{vN}(w(f) : f \in \mathcal{H}_0)$ , die von-Neumann Algebra (siehe [KR97a, Kapitel 5], insbesondere die Definition nach Lemma 5.1.5), die von allen (*reellen*) Positionoperatoren erzeugt wird.

**Definition 3.27** (Vakuumzustand und Erwartungswert)

Sei  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  für einen  $\mathbb{R}$ -Hilbertraum  $\mathcal{H}_0$  gegeben, so definieren wir den Zustand  $\mathbb{E}$  durch

$$\mathbb{E} : \Gamma_q(\mathcal{H}_0) \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{durch} \quad \mathbb{E}[X] := \langle \Omega, X\Omega \rangle_q$$

als die Projektion auf den Vakuumvektor  $\Omega$ . Dann ist  $\mathbb{E}$  der Erwartungszustand bzgl. unseres Vakuums  $\Omega$ . Da wir  $X\Omega$  in der zweiten Komponenten des  $q$ -Skalarprodukts auswerten, ist  $\mathbb{E}$  offensichtlich eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung.

Hier sei darauf hingewiesen, dass der Zustandsvektor  $\Omega$  und der Zustand  $\mathbb{E}$  meistens synonym verwendet werden. Insbesondere wird häufig der Vektor  $\Omega$  bereits als *Zustand* bezeichnet. Ist von einem Zustand im Kontext der  $q$ -Fockräume die Rede, so bezeichnet man mit  $\mathbb{E}$  normalerweise den Zustand bezüglich des Vakuums, außer es wird explizit eine andere Wahl getroffen.

**Lemma 3.28** (Kovarianz von  $q$ -GZV)

Seien  $f, g \in \mathcal{H}$  und  $\xi = w(f)$ ,  $\eta = w(g)$  so gilt:

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \langle f|g \rangle$$

An dieser Stelle lassen wir noch komplexe Vektoren  $f, g$  zu.

*Beweis.* Es gilt

$$\begin{aligned} \xi\eta &= (a^*(f) + a(f))(a^*(g) + a(g)) \\ &= a^*(f)a^*(g) + a^*(f)a(g) + a(f)a^*(g) + a(f)a(g) , \end{aligned}$$

also erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\xi\eta] &= \langle \Omega, a^*(f)a^*(g)\Omega \rangle_q + \langle \Omega, a^*(f)a(g)\Omega \rangle_q + \langle \Omega, a(f)a^*(g)\Omega \rangle_q + \langle \Omega, a(f)a(g)\Omega \rangle_q \\ &= \langle \Omega, a^*(f)g \rangle_q + \langle \Omega, a^*(f)0 \rangle_q + \langle \Omega, a(f)g \rangle_q + \langle \Omega, a(f)0 \rangle_q \\ &= \langle \Omega, f \otimes g \rangle_q + \langle a^*(f)\Omega, g \rangle_q = 0 + \langle f|g \rangle \end{aligned}$$

□



**Folgerung 3.29**

Seien  $f, g \in \mathcal{H}_0$  und  $\xi = w(f)$ ,  $\eta = w(g)$  so gilt:

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}[\eta\xi]$$

Die Vakuumerwartung ist also ein Spurzustand auf  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$ . Die Spureigenschaft geht verloren, sobald komplexe Vektoren zugelassen werden.

*Beweis.* Nach dem vorherigen Lemma 3.28 gilt  $\mathbb{E}[\eta\xi] = \langle g|f \rangle$ . Wegen Symmetrie des Skalarproduktes  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  für Vektoren aus  $\mathcal{H}_0$  gilt

$$\mathbb{E}[\xi\eta] = \langle f|g \rangle = \langle g|f \rangle = \mathbb{E}[\eta\xi]$$

und dies war zu zeigen. □

**Bemerkung 3.30** (Bemerkung zu Definition 3.27)

In [BKS97, Proposition 2.3] wird die Aussage über den Zustand  $\mathbb{E}$  präzisiert. Man kann zeigen, dass der Vakuumvektor  $\Omega$  ein zyklischer und separierender Spurvektor für  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  ist. Die Abbildung  $\mathbb{E}$  wird dadurch zu einem treuen normalen Spurzustand auf  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$ . Damit stellt  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  eine endliche von-Neumann-Algebra in Standardform dar.

Wir wollen die zahlreichen aus der Operatortheorie stammenden Begriffe kurz erläutern:

- (1) Sei  $\mathcal{A}$  eine  $C^*$ -Algebra,  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum sowie  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  eine Abbildung. Wir nennen  $\pi$  eine  $*$ -Darstellung, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
  - (i)  $\pi$  ist Ringhomomorphismus (es gilt also  $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$  sowie  $\pi(x^*) = \pi(x)^*$ ), der Involutionsen aus  $\mathcal{A}$  in Involutionsoperatoren auf  $\mathcal{H}$  überträgt.
  - (ii)  $\pi$  ist nicht entartet, d.h. die Menge

$$\{\pi(x)\xi : \pi \in \mathcal{A}, \xi \in \mathcal{H}\} \subseteq \mathcal{H}$$

ist dicht in  $\mathcal{H}$ . Wenn wir  $\text{id}_{\mathcal{A}} \in \mathcal{A}$  haben, so ist dies genau dann der Fall, wenn  $\pi(\text{id}_{\mathcal{A}}) = \text{id}_{\mathcal{H}}$  gilt.

- (2) Ist  $\mathcal{A}$  eine unitäre  $C^*$ -Algebra (also mit Einheit  $\mathbb{1}$ ) und  $\omega$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{A}$  mit  $\omega(\mathbb{1}) = 1$ , so nennen wir dieses  $\omega$  einen *Zustand*. Die Menge aller Zustände  $\omega$  wird oftmals der *Zustandsraum* der  $C^*$ -Algebra genannt.
- (3) Betrachte  $\mathcal{A}$  eine  $C^*$ -Algebra und ein Element  $A \in \mathcal{A}$ . Es sei  $A$  selbstadjungiert und für das Spektrum gelte  $\sigma(A) \subseteq [0, \infty)$ . Unter diesen Voraussetzungen nennen wir  $A$  *positiv* und schreiben wie üblich  $A \geq 0$ . Sei zusätzlich  $\omega$  ein lineares Funktional auf  $\mathcal{A}$ , so definiert man:

$$\omega \text{ positiv} \iff (A \geq 0 \Rightarrow \omega(A) \geq 0)$$

- (4) Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $x \in \mathcal{H}$  und  $A \in B(\mathcal{H})$  ein Operator. Dann ist durch  $\omega_x(A) := \langle Ax|x \rangle$  ein lineares Funktional auf  $B(\mathcal{H})$  gegeben. Betrachte weiterhin  $\mathcal{A}$  eine  $C^*$ -Unteralgebra von  $B(\mathcal{H})$  sowie  $\mathcal{M}$  einen selbstadjungierten Unterraum von  $\mathcal{A}$ , der die Identität enthält. Dann ist  $\omega_x|_{\mathcal{M}}$  ein positives lineares Funktional auf  $\mathcal{M}$ . Die Zustände, die auf diese Weise aus den Elementen  $x \in \mathcal{H}$  mit  $\|x\| = 1$  entstehen, werden als *Vektorzustände* auf  $\mathcal{M}$  bezeichnet.

- (5) Sei eine  $*$ -Darstellung  $\pi : \mathcal{A} \rightarrow B(\mathcal{H})$  und ein Vektor  $\xi \in \mathcal{H}$  gegeben. Falls die Menge

$$\{\pi(x)\xi : \pi \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{H}$$

normdicht in  $\mathcal{H}$  ist, wird  $\xi$  ein *zyklischer* Vektor genannt. Das  $\pi$  wird in diesem Fall als *zyklische Darstellung* bezeichnet.

(**Es gilt:** Ist  $\xi \in \mathcal{H}$  zyklisch mit  $\|\xi\| = 1$ , dann ist  $x \mapsto \langle \pi(x)\xi | \xi \rangle$  ein Zustand auf  $\mathcal{A}$ .)

- (6) Für den Begriff *normaler Zustand* siehe Definition 7.1.11 und Theorem 7.1.12 aus [KR97b].

- (7) **Theorem 7.2.3** aus [KR97b]

Betrachte eine von-Neumann Algebra  $\Gamma$ , die auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}$  operiert. Sei  $\omega$  ein normaler Zustand auf  $\Gamma$  sowie  $\xi$  ein separierender Vektor für  $\Gamma$ . Dann existiert ein Vektor  $\eta \in \mathcal{H}$  derart, dass  $\omega = \omega_\eta|_\Gamma$  gilt. Also ist jeder normale Zustand in diesem Kontext ein Vektorzustand.

- (8) Sei  $\mathcal{A}$  eine  $C^*$ -Algebra und  $\omega$  ein Zustand auf  $\mathcal{A}$ . Wir nennen  $\omega$  *treu*, wenn  $\omega(A) = 0 \Rightarrow A = 0$  für alle positiven Elemente  $A \in \mathcal{A}$  gilt.

- (9) Betrachte erneut eine von-Neumann Algebra  $\Gamma$  zusammen mit  $\mathcal{H}$ , dem Hilbertraum auf dem  $\Gamma$  operiert. Sei  $\mathcal{F}$  eine Familie von Vektoren aus  $\mathcal{H}$  sowie ein Operator  $A \in \Gamma$  gegeben. Dann nennen wir  $\mathcal{F}$  eine *separierende Familie*, wenn  $(\forall v \in \mathcal{F} : Av = 0) \Rightarrow A = 0$  gilt. Insbesondere wird ein Vektor, für den  $Av = 0 \Rightarrow A = 0$  gilt, *separierend* genannt.

**Bemerkung 3.31** (Erwartungswert und Varianz von Positionsoperatoren)

Sei ein Positionsoperator  $w(f)$  gegeben, so gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w(f)] &= \langle \Omega, (a^*(f) + a(f))\Omega \rangle_q \\ &= \langle \Omega, a^*(f)\Omega \rangle_q + \langle \Omega, a(f)\Omega \rangle_q \\ &= \langle \Omega, f \rangle_q + \langle \Omega, 0 \rangle_q = 0, \end{aligned}$$

da  $f \in \mathcal{H}^{\otimes 1}$ ,  $\Omega \in \mathcal{H}^{\otimes 0}$  und nach Definition des Skalarprodukts  $\mathcal{H}^{\otimes 1} \perp \mathcal{H}^{\otimes 0}$  ist. Weiterhin folgt mit Lemma 3.28 und der Wahl  $\xi = \eta = w(f)$

$$\text{Var}[w(f)] := \mathbb{E}[w(f)^2] - \mathbb{E}[w(f)]^2 = \|f\|^2.$$

Aus diesem Grunde nennen wir die Operatoren  $w(f)$  auch *verallgemeinerte  $q$ -deformierte zentrierte Gauß'sche Zufallsvariablen* mit Varianz  $\|f\|^2$ . Die Motivation diese Operatoren als *Gauß'sche Zufallsvariablen* zu betrachten, wird im Folgenden gegeben. Ein Ziel wird es nämlich sein, die Momente der  $w(f)$  bzgl. des Zustands  $\mathbb{E}$  (also die Werte  $\mathbb{E}[w(f)^n]$  für  $n \in \mathbb{N}$ ) zu bestimmen. Für einen allgemeinen Momentenbegriff im Kontext der nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitstheorie siehe auch [NS06, Definition 4.2].

# 4 Wickformel

Nachdem wir nun bereits die Kovarianz von zwei  $q$ -GZV in Lemma 3.28 betrachtet haben, wollen wir auch kompliziertere Ausdrücke der Form

$$\mathbb{E}[w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1]$$

berechnen, wobei die  $w_i = w(f_i)$  eine Familie von  $q$ -GZV zu  $f_i \in \mathcal{H}_0$  sind. Diese Untersuchung wird uns eine sogenannte Multivariablen-Momentenformel liefern, die auch als *Wickformel* bekannt ist.

Insbesondere interessieren wir uns für den Fall  $w_i = w(f)$  für ein festes  $f$ . Dadurch erhalten wir  $\mathbb{E}[w(f)^n]$ , das  $n$ -te Moment der  $q$ -GZV  $w(f)$ .

**Bemerkung 4.1** (Reduktion des Problems auf Monome)

Betrachte die  $w_i$  aus der vorherigen Bemerkung, dann expandiert sich der Ausdruck  $w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1$  wegen der Definition  $w(f) = a^*(f) + a(f)$  zu

$$\begin{aligned} \prod_{i=0}^{n-1} w_{n-i} &= \prod_{i=0}^{n-1} (a^*(f_{n-i}) + a(f_{n-i})) \\ &= \sum_{\{\epsilon_i\}_{i=1}^n \in \{\pm 1\}^n} a^{\epsilon_n}(f_n) a^{\epsilon_{n-1}}(f_{n-1}) \cdots a^{\epsilon_1}(f_1). \end{aligned}$$

In diesem Ausdruck soll  $a^{+1}(f) = a^*(f)$  sowie  $a^{-1}(f) = a(f)$  gelten.

Da  $\mathbb{E}$  linear ist, reduziert sich unser Problem auf die Betrachtung der Vakuumerwartung der *Monome*

$$a^{\epsilon(n)}(f_n) a^{\epsilon(n-1)}(f_{n-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1)$$

für eine feste Abbildung (endliche Folge)  $\epsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ . Wegen der  $\mathbb{R}$ -Linearität der Abbildung  $f \mapsto w(f)$  wollen wir außerdem  $f_i \neq 0$  für alle  $i$  fordern. Sobald nämlich ein derartiger Fall eintritt, wird der Ausdruck  $w_n w_{n-1} \cdots w_2 w_1$  sofort zum Nulloperator, dessen Vakuumerwartung trivial zu bestimmen ist.

Nicht alle Monome geben überhaupt einen Beitrag zur Vakuumerwartung. Mit Hilfe des Dyckpfads aus der Kombinatorik ist es nun möglich, die Folgen  $\epsilon$  auszusortieren, die definitiv keinen Beitrag liefern.

**Definition 4.2** (Catalanfolgen, Levelfolgen und Dyckpfade)

Eine Catalanfolge soll in unserem Kontext eine endliche Folge aus  $\pm 1$  sein, die einen Dyckpfad (siehe Bemerkung 4.3) beschreibt. Man wird sehen, dass dies nur möglich ist, wenn die Folge eine gerade Anzahl von Folgengliedern besitzt. Betrachten wir also eine Abbildung

$$\epsilon : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\} \quad \text{mit } n = 2m$$

und definieren dazu noch eine Hilfsfolge  $l : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$ , genannt *Levelfolge*, indem wir

$$l(i) := \sum_{j=1}^i \epsilon(j)$$

setzen (mit  $l(0) = 0$ ). Eine derartige Folge  $\epsilon$  ohne die Bedingung  $n = 2m$  nennen wir *Monomfolge*, da sie das obige Monom beschreibt. Nach Konstruktion gilt für die Levelfolge also insbesondere  $|l(i) - l(i + 1)| = 1$ .

Wir nennen nun  $\epsilon$  eine *Catalanfolge*, wenn für die zugehörige Levelfolge  $l(n) = 0$  gilt und wir in jedem Schritt  $l(i) \geq 0$  haben. Hier wird offensichtlich, dass die Länge der Catalanfolge gerade sein muss, denn die Anzahl der  $+1$  in der Folge muss gleich der Anzahl der  $-1$  sein.

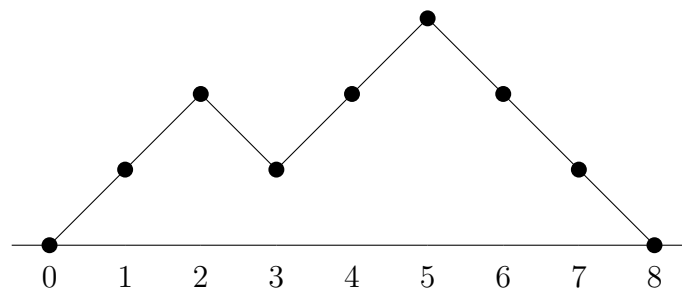
### Bemerkung 4.3

- (i) Sei  $P$  ein Pfad in der  $(x, y)$ -Ebene, der bei  $(0, 0)$  startet und bei  $(2n, 0)$  endet, wobei nur Schritte  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  zugelassen sind. Läuft  $P$  dabei niemals unter die  $x$ -Achse, so nennen wir  $P$  ein *Dyckpfad*.
- (ii) Die Catalanfolge ist *nicht* die Folge der Catalanzahlen  $C_n$  sondern das  $C_n$  zählt die Anzahl der möglichen Catalanfolgen der Länge  $2n$ .
- (iii) Die Anzahl der möglichen Dyckpfade für ein festes  $n$  ist ebenfalls durch  $C_n$  bestimmt.
- (iv) Die Zuordnung einer Dyck-Levelfolge zu einer Catalanfolge ist offensichtlich eine Bijektion.

Für die Aussagen (i) und (iii) siehe [Sta99, Korollar 6.2.3], dort befinden sich in *Exercises 6.19* (i), (j) und (k) Beispiele für derartige Pfade. Die kombinatorische Interpretation über die Catalanfolgen findet man in [Sta99, Exercise 6.10.r].

### Beispiel 4.4

Sei die Catalanfolge  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^8 = \{+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1\}$  gegeben, so berechnet sich die Levelfolge durch Summation als  $\{l_i\}_{i=0}^8 = \{0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 1, 0\}$ . Eine grafische Auswertung ergibt das folgende Schaubild, in dem die Folgenglieder als Punkte dargestellt werden:



Man sieht, dass durch die Visualisierung, hier lineares Verbinden der Punkte, ein Dyckpfad entsteht. Je nach Darstellungsart (die Literatur kennt zahlreiche Varianten) muss das obige Diagramm eventuell noch gedreht werden.

### Lemma 4.5 (Vakuumerwartung von Monomen I)

Sei ein Monom

$$a^{\epsilon(n)}(f_n) a^{\epsilon(n-1)}(f_{n-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1) . \quad (4.1)$$

wie in Bemerkung 4.1 gegeben. Ist durch die zugehörige Monomfolge  $\epsilon$  keine Catalanfolge gegeben, so verschwindet die Vakuumerwartung von (4.1).

Für den Beweis benötigen wir zuerst ein Lemma.

**Lemma 4.6**

Seien  $\epsilon$  und  $f_i$  aus Lemma 4.5 gegeben sowie  $l(j)$  die zu  $\epsilon$  gehörige Levelfolge. Weiterhin setzen wir

$$\alpha_j := a^{\epsilon(j)}(f_j)a^{\epsilon(j-1)}(f_{j-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1)\Omega,$$

womit dann gilt:

- (i) Falls  $l(j) \geq 0$  für alle  $0 \leq j \leq k$  gilt, so folgt  $\alpha_k \in \mathcal{H}^{\otimes l(k)}$ .
- (ii) Falls ein  $j$  mit  $l(j) = -1$  existiert, so verschwinden alle  $\alpha_k$  mit  $k \geq j$ .

Wir beachten, dass der Fall  $\alpha_k = 0$  in (i) weiterhin auftreten kann, aber wegen der Forderung nach einer allgemeinen Null in Bemerkung 3.6 nicht in Widerspruch zur Aussage  $\alpha_k \in \mathcal{H}^{\otimes l(k)}$  steht.

*Beweis zu 4.6.* Wir zeigen Teil (i) mit Induktion. Der Fall  $k = 0$  ist klar, denn dort haben wir

$$\alpha_0 = \Omega = 1 \cdot \Omega \in \mathbb{C}\Omega = \mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\otimes l(0)}$$

nach Definition des 0-Teilchenraumes und der Startbedingung für eine allgemeine Levelfolge. Sei nun die Behauptung bereits für  $k$  gezeigt, so gilt

$$\alpha_{k+1} = a^{\epsilon(k+1)}(f_{k+1})\alpha_k \in a^{\epsilon(k+1)}(f_{k+1})\mathcal{H}^{\otimes l(k)}$$

nach Induktionsvoraussetzung. Ist  $l(k) > 0$  so gilt wegen Bemerkung 3.10

$$\alpha_{k+1} \in \mathcal{H}^{\otimes (l(k)+\epsilon(k+1))} = \mathcal{H}^{\otimes l(k+1)}$$

nach Definition der Levelfolge aus  $\epsilon$ .

Falls  $l(k) = 0$  gilt (d.h.  $\mathcal{H}^{\otimes l(k)} = \mathbb{C}\Omega$ ) so muss  $a^{\epsilon(k+1)}(f_{k+1})$  bereits ein Erzeugungsoperator sein, ansonsten würde im nächsten Schritt  $l(k+1) = -1$  gelten. Also gilt auch in diesem Fall

$$\alpha_{k+1} \in a^*(f_{k+1})\mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathcal{H}^{\otimes 1} = \mathcal{H}^{\otimes l(k+1)}$$

und damit die Behauptung.

Für den Beweis von (ii) nutzen wir (i). Betrachte das  $j$  für welches  $l(j)$  negativ wird und wähle dieses  $j$  minimal, d.h.  $l(i) \geq 0 \forall 0 \leq i < j$ . Dann muss  $l(j-1) = 0$  gewesen sein und nach (i) gilt somit  $\alpha_{j-1} \in \mathbb{C}\Omega$ . Aus  $l(j) = -1$  und  $l(j-1) = 0$  folgt ebenfalls, dass  $a^{\epsilon(j)}(f_j)$  bereits ein Vernichtungsoperator ist und damit  $\alpha_{j-1}$  auf Null abbildet.

Damit ist klar, dass auch jedes weitere  $\alpha_k$  mit  $k \geq j$  verschwindet, denn die Operatoren waren linear.  $\square$

*Beweis zu 4.5.* Sei also  $\epsilon$  eine Catalanfolge, d.h. die Folge hat Länge  $n = 2m$  und es gilt  $l(j) \geq 0 \forall j$  sowie  $l(n) = 0$ . Nach Lemma 4.6 (i) gilt nun  $\alpha_n \in \mathcal{H}^{\otimes 0} = \mathbb{C}\Omega$ . Wir erhalten

$$\mathbb{E}[a^{\epsilon(n)}(f_n)a^{\epsilon(n-1)}(f_{n-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1)] = \langle \Omega, z \cdot \Omega \rangle_q = z \cdot \|\Omega\|_q$$

mit  $z \in \mathbb{C}$ .

Sei nun  $\epsilon$  keine Catalanfolge. Tritt der Fall (ii) aus 4.6 ein, so ist klar, dass der Erwartungswert ebenfalls verschwindet. Gilt  $l(n) \neq 0$ , so verschwindet  $\mathbb{E}$  wegen der Orthogonalität der  $n$ -Teilchenräume ( $\mathcal{H}^{\otimes i} \perp \mathcal{H}^{\otimes j}$  für  $i \neq j$ ).  $\square$

**Definition 4.7** (Kompatible Paarpartitionen)

Sei eine Catalanfolge  $\epsilon$  der Länge  $2m$  gegeben sowie eine Paarpartition  $\pi \in \mathcal{P}_2(2m)$ . Wir wollen  $\pi$  in der Form

$$\pi = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$$

schreiben, mit  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  sowie  $i_k < j_k$  für alle  $k$ .

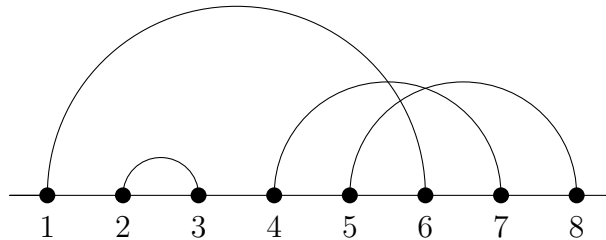
Wir nennen die Partition  $\pi$  *kompatibel* zu  $\epsilon$ , wenn für alle  $1 \leq k \leq m$  gilt:

$$\epsilon(i_k) = +1 \quad \text{sowie} \quad \epsilon(j_k) = -1$$

Die Catalanfolge gibt also für die Paarpartition vor, wo ein Block der Partition geöffnet wird (an den Stellen der  $+1$ ) und wo er geschlossen (dort wo  $-1$  steht) wird.

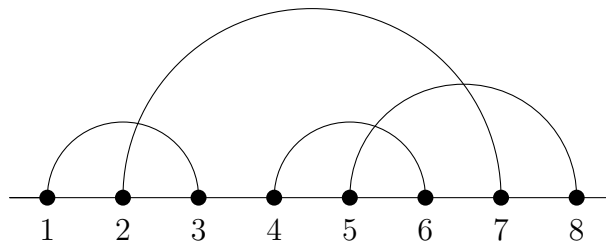
**Beispiel 4.8**

Sei wieder die Catalanfolge  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^8 = \{+1, +1, -1, +1, +1, -1, -1, -1\}$  gegeben. Betrachte die Paarpartition  $\pi = \{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 7\}, \{5, 8\}\}$ :



Aus dem ersten Block erhalten wir  $\epsilon(1) = +1$ ,  $\epsilon(6) = -1$ , der zweite Block liefert  $\epsilon(2) = +1$ ,  $\epsilon(3) = -1$ , der dritte  $\epsilon(4) = +1$ ,  $\epsilon(7) = -1$  und der vierte  $\epsilon(5) = +1$ ,  $\epsilon(8) = -1$ , was letztendlich die ursprüngliche Folge ergibt. Wir sehen also, dass die obige Paarpartition kompatibel zur vorgegebenen Catalanfolge ist.

Allerdings erfüllt die nächste Paarpartition ebenfalls die Kompatibilitätsbedingung:



Entscheidend ist hier, dass die Folge  $\epsilon$  nur vorgibt, an welcher Stelle ein Block geschlossen wird, aber nicht *welcher* Block geschlossen wird. Für eine Konstruktion aller kompatiblen Paarpartitionen bei vorgegebenem  $\epsilon$  würde man damit eine Liste der aktuellen offenen Blöcke führen und könnte an der Position  $j$  mit  $\epsilon(j) = -1$  aus dieser Liste den Block auswählen, der geschlossen werden soll.

**Bemerkung 4.9**

Im Allgemeinen wird es bei einer fest vorgegebenen Catalanfolge mehrere kompatible Paarpartitionen geben. Dies wird auch aus der Betrachtung der Kardinalität der Mengen offensichtlich:

- (i) Die Anzahl der Catalanfolgen mit Länge  $2N$  ist durch die Catalananzahl  $C_N = \frac{1}{N+1} \binom{2N}{N}$  (siehe [Sta99, Proposition 6.2.2]) gegeben.

(ii)  $C_N$  ist aber auch die Anzahl der nichtkreuzende Paarpartitionen auf  $\{1, \dots, 2N\}$ .

Mit Beispiel 4.8 erkennt man allerdings, dass kompatible Paarpartitionen durchaus Kreuzungen aufweisen können, also in  $\mathcal{P}_2$  und nicht allein in  $\mathcal{NC}_2$  liegen.

Die Menge der kompatiblen Paarpartitionen zu einer Catalanfolge  $\epsilon$  bezeichnen wir mit  $\mathcal{P}_2(\epsilon)$ .

**Lemma 4.10** (Partitionierung von  $\mathcal{P}_2(n)$  durch Catalanfolgen)

Sei  $n = 2m$  für  $m \in \mathbb{N}$ , so können wir die Paarpartitionen der Menge  $\{1, \dots, 2m\}$  auf folgende Art

$$\mathcal{P}_2(2m) = \{\pi \in \mathcal{P}_2(2m) : \exists \epsilon \text{ Catalanfolge der Länge } 2m \text{ mit } \pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)\}$$

durch die Catalanfolgen partitionieren.

Weiterhin ist bei vorgegebener Paarpartition  $\pi$  die Catalanfolge, zu der  $\pi$  kompatibel ist, eindeutig festgelegt (siehe dazu Definition 4.7). Es gilt also insbesondere

$$\forall \epsilon \neq \epsilon' \implies \mathcal{P}_2(\epsilon') \cap \mathcal{P}_2(\epsilon) = \emptyset$$

und wir erhalten somit eine disjunkte Zerlegung

$$\mathcal{P}_2(2m) = \bigcup_{\epsilon \text{ Catalan}} \mathcal{P}_2(\epsilon).$$

*Beweis.* Sei also  $\pi \in \mathcal{P}_2(2m)$  gegeben, so bringen wir  $\pi$  in die Form

$$\{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$$

aus Definition 4.7 mit  $i_1 < \dots < i_m$  sowie  $i_k < j_k$ . Dann setzen wir das  $\epsilon$  als  $\epsilon(i_k) = +1$  sowie  $\epsilon(i_k) = -1$ . Dies liefert sofort, dass für die Levelfolge  $l(2m) = 0$  gelten muss.

Es bleibt zu zeigen, dass  $l(i) \geq 0$  für alle  $i$  gilt. Für  $l(1) = \epsilon(1)$  ist dies klar, denn wäre  $\epsilon(1) = -1$ , so müsste es ein  $s$  geben mit  $1 = j_s$ . Allerdings folgt dann auch  $i_s < 1$  und dies ist offensichtlich ein Widerspruch.

Sei die Behauptung also für  $l(i)$  gezeigt und folgere  $l(i+1) \geq 0$ . Wegen  $l(i+1) = l(i) + \epsilon(i+1)$  und  $l(i) \geq 0$  reicht es den Fall  $l(i) = 0$  zu betrachten, da für  $l(i) > 0$  ohnehin die Behauptung folgt. Ist nun  $l(i) = 0$ , so sehen wir, dass  $\epsilon$  eingeschränkt auf  $\{1, \dots, i\}$  (insbesondere muss  $i$  dann gerade sein) selbst wieder eine Catalanfolge ist. Zu dieser eingeschränkten Folge gehört erneut eine vollständige Paarpartition. Das bedeutet, dass für  $l(i) = 0$  alle vor der Position  $i$  erzeugten Blöcke bereits wieder geschlossen sind. Das  $i+1$  aus dem  $\epsilon(i+1)$  kann also keinem  $j_s$  entsprechen, da es zu diesem Zeitpunkt keinen offenen Block mehr gibt. Also muss  $\epsilon(i+1) = \epsilon(i_s) = +1$  für ein  $s$  gelten und damit folgt die Behauptung.  $\square$

**Definition 4.11** (Paarpartition und Kovarianz)

Sei  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\{f_i\}_{i=1}^{2m} \subseteq \mathcal{H}_0$  und eine Paarpartition  $\pi \in \mathcal{P}_2(2m)$  gegeben. Wir bringen  $\pi$  in die Form  $\pi = \{\{i_1, j_1\}, \{i_2, j_2\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$  mit  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  und  $i_k < j_k$  für alle  $k$ .

Damit setzen wir

$$\text{cov}(\pi) := \prod_{k=1}^m \mathbb{E}[w_{i_k} w_{j_k}],$$

wobei  $w_j = w(f_j)$  die zugehörigen Positionsoperatoren sind.

Mit unserem Wissen über die Kovarianz gilt

$$\text{cov}(\pi) = \prod_{k=1}^m \langle f_{i_k} | f_{j_k} \rangle \stackrel{(*)}{=} \prod_{(i,j) \in \pi} \langle f_i | f_j \rangle, \quad (4.2)$$

wobei wir in (\*) implizit die Symmetrie des Skalarproduktes für *reelle* Vektoren  $f_i$  ausnutzen.

Die Abbildung  $\text{cov}(\cdot)$  ist ein Spezialfall einer Definition aus [EP03, Abschnitt 2] für Feynman-Diagramme, die wir kurz in Definition 2.11 erwähnt hatten. Sei wieder  $m \in \mathbb{N}$ , zuhörige Vektoren  $f_l$  ( $1 \leq l \leq m$ ) und eine Partition  $\pi \in \mathcal{P}(m)$  der Form

$$\pi = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_s, j_s\}, \{k_1\}, \dots, \{k_t\}\}$$

mit  $2s + t = m$  gegeben. Dann hatten wir  $\pi$  ein Feynman-Diagramm genannt. Wie eben fordern wir, dass die  $i_l$  ( $1 \leq l \leq s$ ) und  $k_l$  ( $1 \leq l \leq t$ ) aufsteigend geordnet sind. Damit setzt man nun:

$$\text{cov}(\pi) = \left( \prod_{l=1}^s \mathbb{E}[w_{i_l} w_{j_l}] \right) \cdot \left( \prod_{l=1}^t w_{k_l} \right) = \left( \prod_{(i,j) \in \pi} \langle f_i | f_j \rangle \right) w(f_{k_1}) \cdots w(f_{k_t})$$

Hier ist die Sortierung der  $k_l$  wichtig, da die Positionsoperatoren im Allgemeinen nicht kommutieren.

**Bemerkung 4.12** (Kovarianz für normiertes  $f$ )

Wie bereits erwähnt wurde, ist man insbesondere am Spezialfall  $f_i := f$  für ein festes  $f$  interessiert. Setzen wir nun zusätzlich  $f$  als normiert, also  $\|f\| = 1$ , voraus und betrachten die Kovarianz aus Definition 4.11, so gilt  $\text{cov}(\pi) = 1$  wegen

$$\text{cov}(\pi) = \prod_{(i,j) \in \pi} \langle f_i | f_j \rangle = \prod_{(i,j) \in \pi} \|f\|^2 = \prod_{(i,j) \in \pi} 1$$

für jede Paarpartition  $\pi$ .

**Lemma 4.13** (Vakuumerwartung für Monome II)

Sei  $\epsilon \in C(2m)$  eine Catalanfolge und  $\{f_i\}_{i=1}^{2m} \subseteq \mathcal{H}_0$  eine Familie von Vektoren, dann gilt:

$$\langle \Omega, a^{\epsilon(2m)}(f_{2m}) a^{\epsilon(2m-1)}(f_{2m-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1) \Omega \rangle_q = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \quad (4.3)$$

Zum Beweis des Lemmas wollen wir den kombinatorischen Ansatz aus [BY06] wählen und müssen deshalb ein wenig ausholen. Wir werden im Folgenden zwei Kartentypen (Karten wie in Spielkarten) definieren, die es uns ermöglichen werden, den Ausdruck

$$a^{\epsilon(2m)}(f_{2m}) a^{\epsilon(2m-1)}(f_{2m-1}) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1) \Omega$$

in (4.3) so zu visualisieren, dass die Auswertung der Vakuumerwartung zu einem einfachen Ablesen an den Karten wird.

Die Karten werden den Operatoren  $a^{\epsilon(k)}(f_k)$  entsprechen und aus diesem Grund müssen wir sowohl Erzeugungs- als auch Vernichtungskarten vorbereiten. Diese sind so konstruiert, dass sie nur in bestimmten Kombinationen aneinandergelegt werden können. Die vorgegebene Catalanfolge liefert uns dabei das Rezept, nach dem die Karten zusammengelegt werden, allerdings nicht in eindeutiger Weise. Jede zulässige Variante, die Karten zu legen, entspricht einem Summanden  $q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi)$  aus der obigen Summe in (4.3). In der Tat kann die Paarpartition  $\pi$  nach Anordnen der Karten dort abgelesen werden.

**Definition 4.14** (Erzeugungs- und Vernichtungskarten)

Unsere Karten werden ein rechteckiges Format (siehe die kommenden Beispiele) haben. Weiterhin wollen wir folgende allgemeine Eigenschaften fordern:



- (i) Es gibt nur zwei Typen von Karten: Erzeugungskarten und Vernichtungskarten.
- (ii) Es gibt einen ausgezeichneten Punkt in der Mitte der unteren Kartenkante (Grundline der Karte), je nach Kartentyp entweder Erzeugungs- oder Vernichtungspunkt genannt.
- (iii) Die im Folgenden definierten Linien auf der Karte verlaufen von links nach rechts (Fluss-sinn).
- (iv) Zuflusspunkte befinden sich auf der linken Seite, Abflusspunkte auf der rechten Seite der Karte.
- (v) Zufluss- sowie Abflusspunkte werden mit 1 startend von unten beginnend indiziert.

Erzeugungskarten  $C_i$  ( $i$  wird das Level der Karte genannt) erfüllen die folgenden Voraussetzungen:

- (i) Jede Erzeugungskarte besitzt mindestens einen Abflusspunkt.
- (ii) Erzeugungskarten vom Level  $i$  ( $i \in \mathbb{N}_0$ ) haben  $i$  Zuflusspunkte und  $i + 1$  Abflusspunkte.
- (iii) Der Zuflusspunkt vom Level  $k$  ( $1 \leq k \leq i$ ) wird mit dem Abflusspunkt vom Level  $k + 1$  durch eine Linie auf der Karte verbunden (dies ergibt also insgesamt  $i$  Durchflusslinien auf der Karte).
- (iv) Eine weitere Linie verläuft vom Erzeugungspunkt zum Abflusspunkt vom Level 1.

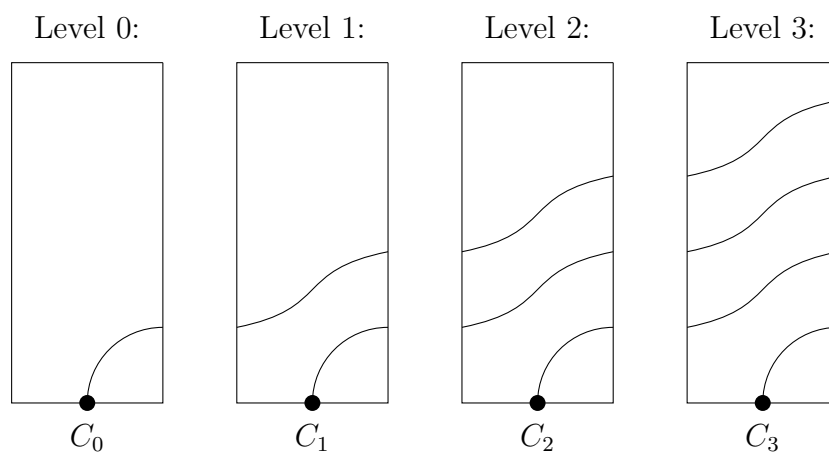
Insbesondere gibt es zu jedem Level nur eine einzige Erzeugungskarte. Dies wird für die Vernichtungskarten anders sein, denn dort werden wir für jedes Level  $i$  genau  $i$  verschiedene Karten  $A_i^{(1)}, A_i^{(2)}, \dots, A_i^{(i)}$  konstruieren. Dabei nennen wir den Parameter  $j$  in  $A_i^{(j)}$  den *Index* der Karte. Hier fordern wir:

- (i) Jede Vernichtungskarte besitzt mindestens einen Zuflusspunkt.
- (ii) Vernichtungskarten vom Level  $i$  ( $i \in \mathbb{N}_1$ , für  $i = 0$  existiert keine Karte da dort bereits alles vernichtet wurde) haben  $i$  Zuflusspunkte und  $i - 1$  Abflusspunkte.
- (iii) Der Zuflusspunkt vom Level  $k$  ( $j < k \leq i$ ) wird mit dem Abflusspunkt vom Level  $k - 1$  verbunden (also werden alle Zuflusspunkte oberhalb des Kartenindizes ein Level nach unten befördert).
- (iv) Der Zuflusspunkt vom Level  $k$  ( $1 \leq k < j$ ) wird mit dem Abflusspunkt vom Level  $k$  verbunden (also erhalten Zuflusspunkte unterhalb des Kartenindizes ihr Level und laufen weiter).
- (v) Der Zuflusspunkt vom Level  $j$  (Index der Karte) wird mit dem Vernichtungspunkt auf der Karte verbunden (diese zufließende Linie endet also auf der Karte).

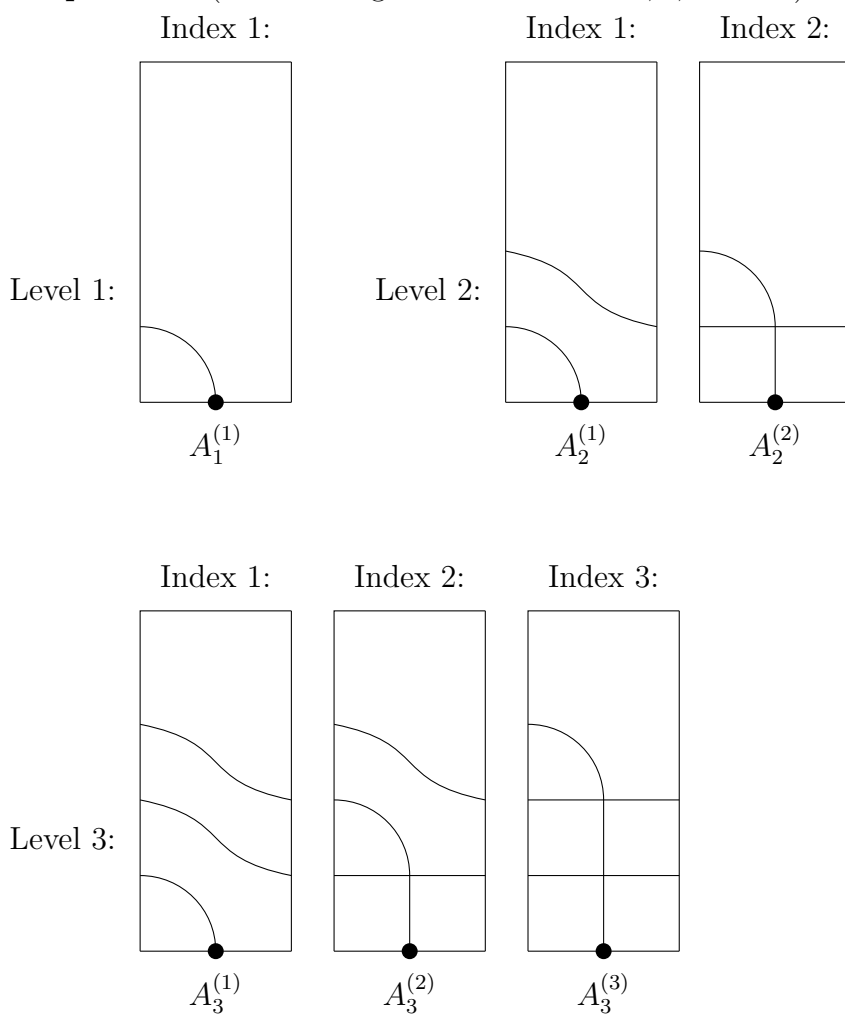
Wir definieren zunächst die rohen Karten ohne Gewichte (Skalare aus  $\mathbb{C}$ ). Diese Skalare werden nachher benötigt, um das Ablesen der Vakuumerwartung von der Kartenanordnung zu ermöglichen.

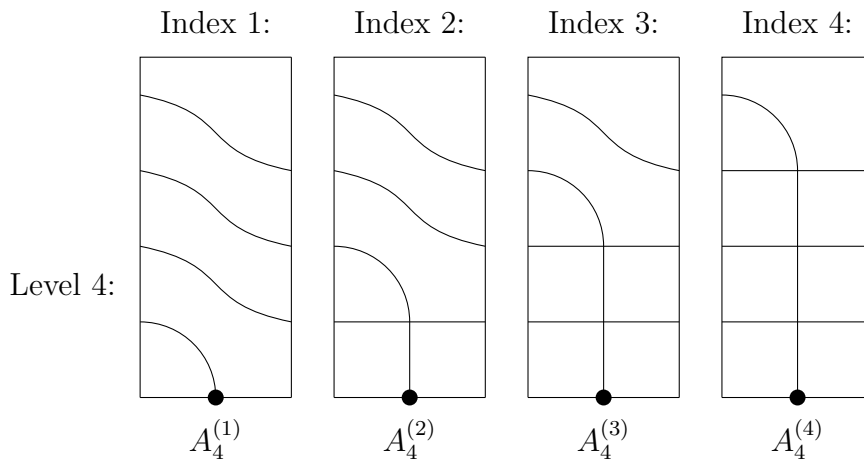
Außerdem möchten wir eine Levelabbildung  $\text{lvl}$  definieren, die für eine Karte egal welchen Typs das Level  $i$  liefert. Ebenfalls definieren wir, diesmal ausschließlich für Vernichtungskarten, die Indexabbildung durch  $\text{idx}(A_i^{(j)}) = j$ .

**Beispiel 4.15** (Erzeugungskarten der Level 0, 1, 2 und 3)



**Beispiel 4.16** (Vernichtungskarten der Level 1, 2, 3 und 4)





**Bemerkung 4.17** (Linienverhalten auf der Karte)

Wir sind daran interessiert, wie sich die startenden, endenden und durchlaufenden Linien auf den Karten verhalten. Insbesondere sind wir an den *Kreuzungen* zwischen den Linien interessiert.

Für die Erzeugungskarten ist dieser Sachverhalt sehr klar, denn dort gibt es keinerlei Kreuzungen der Linien. Bei den Vernichtungskarten hingegen treten im Allgemeinen Kreuzungen auf, deren Anzahl sich mit Hilfe des Kartenindex angeben lässt. Dazu merken wir als erstes an, dass die Vernichtungskarte von Index 1 eines bestimmten Levels aus der Erzeugungskarte desselben Levels entsteht, indem man an der durch den Erzeugungspunkt verlaufenden  $y$ -Achse spiegelt. Offensichtlich haben wir somit auf Karten mit Index 1 keinerlei Kreuzungen.

Kreuzungen entstehen immer dort, wo eine zufließende Linie (z.B. vom Level  $k$ ) zum Vernichtungspunkt auf der Karte geleitet wird und dabei die Linien, die unterhalb des Levels  $k$  verlaufen, kreuzt. Da das Level der zu vernichtenden Linie durch den Index  $j$  der Karte gegeben ist, wird klar, dass wir genau  $j - 1$  Kreuzungen auf einer Vernichtungskarte  $A_i^{(j)}$  zählen.

**Bemerkung 4.18** (Zusammenhang zwischen Karte und Operator)

Bis jetzt haben wir die Karten nur definiert, allerdings ist der Zusammenhang zwischen dem Operator und der Karte bzw. den Karten (wenn ein Vernichtungsoperator betrachtet wird) noch nicht erklärt worden.

Im Falle des Erzeugungsoperators  $a^*(f)$  ist die Anschauung sehr einfach. Wie aus der Definition des Operators bekannt, bildet dieser einen Elementarvektor  $f_1 \otimes \dots \otimes f_i$  auf einen *verlängerten* Elementarvektor  $f \otimes f_1 \otimes \dots \otimes f_i$  ab. Dieser Operator wird durch die Erzeugungskarte vom Level  $i$  dargestellt. Dabei repräsentiert  $f_1 \otimes \dots \otimes f_i$  die bereits bestehende Linien, die als Zuflusspunkte in die Karte von links hineinlaufen. Das hinzugefügte Teilchen im Zustand  $f$  ist die auf der Karte im Erzeugungspunkt entspringende Linie. Normalerweise würde man den Zustand  $f$  auf derjenige Karte, auf dem er entspringt, notieren. Da unsere Zustände jedoch immer durchnummeriert sind, wird es für uns ausreichen, den Zustand durch den zugehörigen Index zu notieren (siehe auch das kommende Beispiel 4.20).

Die Aktion des Vernichtungsoperators ist durch eine Summe definiert, aus diesem Grunde sind mehrere Karten notwendig um den Operator zu beschreiben. Wendet man den Vernichtungsoperator  $a(f)$  auf den Elementarvektor  $f_1 \otimes \dots \otimes f_i$  an, so erhalten wir eine Summe von  $i$  Elementarvektoren

$$\lambda_k \cdot \bigotimes_{k \neq j=1}^i f_j \tag{4.4}$$

der Länge  $i - 1$ . Dabei sind die  $\lambda_k$  komplexe Vorfaktoren, die erst wieder bei der Einführung der Kartengewichte eine Rolle spielen werden. Jede Vernichtungskarte des Levels  $i$  entspricht also einem dieser obigen Summanden. Dabei ist in diesem Fall  $k$  der Kartenindex, denn dieser gibt uns an, welche zufließende Linie vernichtet werden soll – genau wie das  $k$  im Summanden angibt, welcher Teilchenzustand aus dem Tensorprodukt entfernt wird.

**Definition 4.19** (Zulässige Kartenanordnungen)

Sei eine Catalanfolge  $\epsilon$  der Länge  $n = 2m$  gegeben, so wollen wir nun erklären, wie man aus der Folge Anordnungen der eingeführten Karten erhält. Diese geben dann Aufschluss über die Vakuumerwartung des Monoms, welches zu  $\epsilon$  gehört. Sei dazu  $l(i)$  die Levelfolge von  $\epsilon$  und

$$CA : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{C_i : i \in \mathbb{N}_0\} \cup \{A_i^{(j)} : i \in \mathbb{N}_1, 1 \leq j \leq i\}$$

die Anordnungsabbildung, die wir definieren wollen.

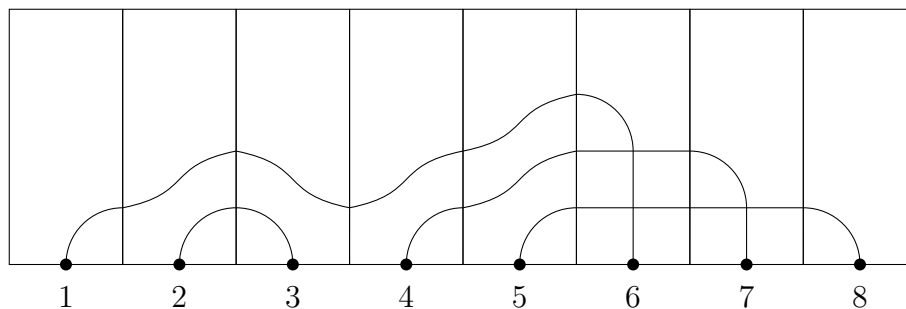
Sei also  $1 \leq k \leq n$  gewählt, dann betrachten wir  $\epsilon(k)$ . Ist dies  $+1$  so setzen wir an die Position  $k$  der Anordnung CA eine Erzeugungskarte  $C$  – im Falle  $-1$  eine Vernichtungskarte  $A$ . Das Level der zu setzenden Karte bestimmt sich durch die Levelfolge an der Stelle  $k$ , also  $lvl(C) = l(k)$  bzw.  $lvl(A) = l(k)$ . Diese Konstruktion sichert, dass angrenzende Kartenpaare *kompatibel* sind, also identische Anzahl von Abfluss- bzw. Zuflusspunkten besitzen.

Beim Setzen einer Erzeugungskarte gibt es keinerlei Auswahlmöglichkeiten, allerdings kann bei einer Vernichtungskarte der Index frei zwischen 1 und dem Level der Karte, also hier  $l(k)$ , gewählt werden. An der Position  $k$  gibt es im Falle  $\epsilon(k) = -1$  damit  $l(k)$  mögliche Varianten eine Karte zu setzen.

Hat man alle  $n$  Positionen besetzt, so nennen wir die entstehende Abbildung CA eine zulässige Kartenanordnung (*admissible card arrangement*) für die Catalanfolge  $\epsilon$ . Wegen der Variationsmöglichkeiten bei den Vernichtungskarten ist diese Anordnung natürlich nicht eindeutig und im Allgemeinen wird es mehrere Anordnungen geben, die für dieses  $\epsilon$  zulässig sind. Wir nennen diese Menge von Anordnungen  $CA(\epsilon)$ .

**Beispiel 4.20** (Beispieldarstellung einer solchen Anordnung)

Erneut wählen wir die Catalanfolge, die schon aus Beispiel 4.4 bekannt ist. Eine zulässige Kartenanordnung ist unten abgebildet:



Insbesondere sieht man hier, dass die Kartenanordnung eine Paarpartition *produziert*, die mit dem ersten Schaubild aus Beispiel 4.8 übereinstimmt. Zu dieser Eigenschaft der Kartenanordnungen mehr in der folgenden Bemerkung.

**Bemerkung 4.21** (Paarpartition einer zulässigen Anordnung)

Zu einer zulässigen Kartenanordnung gehören immer eine gerade Anzahl  $n = 2m$  von Karten. Insbesondere sind dies genau  $m$  Erzeugungs- und  $m$  Vernichtungskarten. Auf den Karten wird entweder eine Linie erzeugt oder vernichtet, dies entspricht dem Öffnen bzw. Schließen eines

Blockes (Paares) der Paarpartition.

Nach Konstruktion der Karten und Verfahren zum Legen ist klar, dass eine in einem Erzeugungspunkt entspringende Linie genau zu einem bestimmten Vernichtungspunkt auf einer anderen Karte läuft. Insbesondere gibt es keine Aufspaltung der Linien und sie enden ebenfalls nicht abrupt auf den Karten.

Insgesamt liefert also jede zulässige Kartenanordnung eine Paarpartition aus  $m$  Blöcken. In der Tat sind diese entstehenden Paarpartitionen im Sinne der Definition 4.7 *kompatibel* zur ausgehenden Catalanfolge. Wir bezeichnen bei vorgegebenem CA die Paarpartition als  $\pi_{CA}$ .

**Lemma 4.22** (Bijektion zwischen Kartenanordnungen und Paarpartitionen)

Wie aus Bemerkung 4.21 bereits vermutet werden kann, stehen bei fest vorgegebener Catalanfolge  $\epsilon$  die zulässigen Kartenanordnungen und die kompatiblen Paarpartitionen in einer bijektiven Beziehung zueinander. Betrachte die in 4.21 erklärte Abbildung

$$\Psi : CA(\epsilon) \longrightarrow \mathcal{P}_2(\epsilon) ,$$

die zu einer Kartenanordnung durch *Verfolgen der Linien* eine Paarpartition liefert. Dann ist  $\Psi$  eine Bijektion.

*Beweis.* Seien nun  $CA_1, CA_2 \in CA(\epsilon)$  unterschiedliche Kartenanordnungen. Dann stimmen die Anordnungen zwar an den Positionen überein, auf denen Erzeugungskarten liegen, aber es existiert mindestens ein Position  $j$  mit  $CA_1(j) \neq CA_2(j)$ . Wähle dieses  $j$  minimal, dann liegen an dieser Position Vernichtungskarten mit gleichem *Level*, aber unterschiedlichem Index, d.h.  $\text{idx}(CA_1(j)) \neq \text{idx}(CA_2(j))$ . Dann folgt aber unmittelbar  $\Psi(CA_1) \neq \Psi(CA_2)$ , denn an der  $j$ -ten Position werden unterschiedliche Blöcke geschlossen, was letztendlich zu anderen Paarpartitionen führt. Die Abbildung  $\Psi$  ist also injektiv.

Für die Surjektivität sei ein  $\pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)$  in der kanonische Darstellung  $\pi = \{\{i_1, j_1\}, \dots, \{i_m, j_m\}\}$  mit  $i_1 < i_2 < \dots < i_m$  und  $i_k < j_k$  gegeben. Wir suchen ein  $CA \in CA(\epsilon)$  mit  $\pi = \pi_{CA}$ . Die Positionen der Erzeugungskarten sind durch  $\epsilon$  fest vorgegeben, dies sind wegen  $\epsilon(i_k) + 1$  gerade die Positionen  $i_1, \dots, i_m$ . Die Vernichtungskarten befinden sich wiederum an den Positionen  $j_1, \dots, j_m$ . Betrachte nun in aufsteigender Form die Positionen  $j \in \{1, \dots, 2m\}$  und wähle an den Positionen mit  $j = j_k$  den Index der Vernichtungskarte in der Weise, dass diejenige Linie vernichtet wird, die an der Position  $i_k$  gestartet wurde. Wegen  $i_k < j_k$  existiert diese Linie bereits und wurde nach Konstruktion auch noch nicht an anderer Stelle vernichtet.  $\square$

**Definition 4.23** (Kartengewichte für eine Anordnung)

Bis jetzt haben wir noch vollständig die Faktoren  $\lambda_k$  in der Summe (4.4) ignoriert. Diese Faktoren sollen nun ins Spiel kommen, indem wir Gewichte für die Karten einführen. Da bei den Erzeugungsoperatoren keine Faktoren auftreten, können wir die Gewichte für die zugehörigen Karten als konstant 1 setzen und müssen uns nur noch um die Vernichtungskarte kümmern.

Wir erinnern uns, dass der Vernichtungsoperator auf dem  $q$ -Fockraum durch

$$a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f | f_i \rangle f_1 \otimes \dots \otimes \check{f}_i \otimes \dots \otimes f_n \quad (4.5)$$

auf Elementarvektoren definiert war. Kombinatorisch wird der Operator durch die Menge der Vernichtungskarten vom Level  $n$  dargestellt, wobei der Ausdruck  $f_1 \otimes \dots \otimes \check{f}_i \otimes \dots \otimes f_n$  der Karte mit Index  $i$  entspricht. Das Gewicht für diese Karte (also mit Level  $n$  und Index  $i$ ) sollte also  $q^{i-1} \langle f | f_i \rangle$  sein. Es bietet sich an, Gewichte nicht für die einzelne Karte, sondern die

gesamte Kartenanordnung zu definieren, da die Paarpartition  $\pi$  erst feststeht, wenn alle Karten der Anordnung liegen.

Dazu sei CA eine zulässige Anordnung sowie  $\pi$  die zugehörige Paarpartition ( $\pi \in \mathcal{P}(\epsilon)$ ) mit der zugrundeliegenden Catalanfolge  $\epsilon$  der Länge  $n = 2m$ ). Definiere dazu

$$\begin{aligned} \lambda : \{1, \dots, n\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ \lambda : k &\longmapsto \begin{cases} 1 & : \epsilon(k) = +1 \\ q^{\text{idx}(\text{CA}(k))-1} \langle f_k | f_{i(k)} \rangle & : \epsilon(k) = -1, \end{cases} \end{aligned}$$

wobei  $i(k)$  das Element aus dem Block  $\{i(k), k\} \in \pi$  ist. Insbesondere ist  $i(k)$  damit eindeutig bestimmt. Wir nutzen hier aus, dass uns die Partition  $\pi$  das  $i$  liefert (durch *Zurückverfolgen* der Linie zum Erzeugungspunkt), welches im Skalarprodukt  $\langle f | f_i \rangle$  (siehe (4.5)) als  $f_i$  auftaucht. Die folgende Bemerkung erläutert anhand eines vorigen Beispiels, warum diese kompliziert anmutende Konstruktion notwendig ist.

**Bemerkung 4.24** (Verwendung der Paarpartition für die Kartengewichte)

In Beispiel 4.20 hatten wir das Monom

$$a(f_8)a(f_7)a(f_6)a^*(f_5)a^*(f_4)a(f_3)a^*(f_2)a^*(f_1)$$

als Ausgangsobjekt für die dortige Kartenanordnung gewählt. Betrachte nun die Karte an der Position 6 (von links gezählt), d.h. wir haben  $k = 6$  für die Gewichtsabbildung  $\lambda(k)$  aus der obigen Definition 4.23. Das CA(6) ist eine Vernichtungskarte mit Level 3 und  $\text{idx}(\text{CA}(6)) = 3$ . Damit entspricht  $\text{CA}(6) = A_3^{(3)}$  dem dritten Summand des Ausdrucks

$$a(f_6)g_1 \otimes g_2 \otimes g_3 = \sum_{i=1}^3 q^{i-1} \langle f_6 | g_i \rangle g_1 \otimes \dots \otimes \check{g}_i \otimes \dots \otimes g_3, \quad (*)$$

wobei wir betonen wollen, dass hier im Allgemeinen  $g_j \neq f_j$  gilt (sogar nach Umkehrung der Indizierungsreihenfolge der  $g_j$ ).

Die Elemente  $g_j$  gehen allerdings aus den  $f_j$  durch die bereits *angewendeten* Karten (an den Positionen 1 bis 5) hervor. Nach Konstruktion erhält man die  $g_j$  nämlich genau durch Zurückverfolgen der Zuflussspunkte auf der betrachteten Karte, in diesem Fall also  $g_1 = f_5$ ,  $g_2 = f_4$  sowie  $g_3 = f_1$ . Da wir allerdings nur am Gewicht der Karte CA(6) und damit dem *dritten* Summand in (\*) interessiert sind, reicht uns die Information  $g_3 = f_1$  sowie die Kenntnis der zugehörigen Paarpartition

$$\pi_{\text{CA}} = \{\{1, 6\}, \{2, 3\}, \{4, 7\}, \{5, 8\}\}.$$

Das Gewicht bestimmt sich dann durch das Produkt von  $q^2$  ( $2 = \text{„Index der Karte“} - 1$ ) und dem Skalarprodukt  $\langle f_6 | g_3 \rangle$  mit

$$\langle f_6 | g_3 \rangle = \langle f_6 | f_1 \rangle = \langle f_k | f_{i(k)} \rangle,$$

wobei  $\{i(k), k\}$  der Block  $\{1, 6\}$  aus  $\pi_{\text{CA}}$  ist. Es gilt also genau  $\lambda(k) = q^{\text{idx}(\text{CA}(k))-1} \langle f_k | f_{i(k)} \rangle$ .

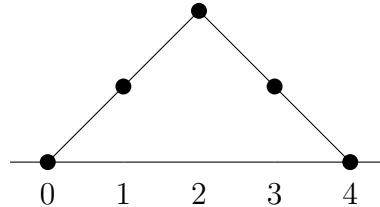
Nachdem wir die notwendigen Karten nun eingeführt haben, wollen wir die Vakuumerwartung des Monoms (4.1) aus Lemma 4.5 bestimmen. Wir beginnen mit zwei übersichtlichen Beispielen und übertragen danach die Idee aus den Beispielen in einen allgemeinen Beweis.

**Beispiel 4.25** (Vorbereitungen für den Beweis von Lemma 4.13)

Wir starten mit der Betrachtung einer Catalanfolge der Länge  $n = 4$  (die Betrachtung kürzerer Folgen ist trivial, insbesondere existiert für  $n = 2$  nur eine einzig mögliche Folge). Genauer gilt unser Interesse der Folge  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^4 = \{+1, +1, -1, -1\}$ . Also hat das Monom, zu welchem die Vakuumerwartung bestimmt werden soll, die Form

$$a(f_4)a(f_3)a^*(f_2)a^*(f_1) \tag{*}$$

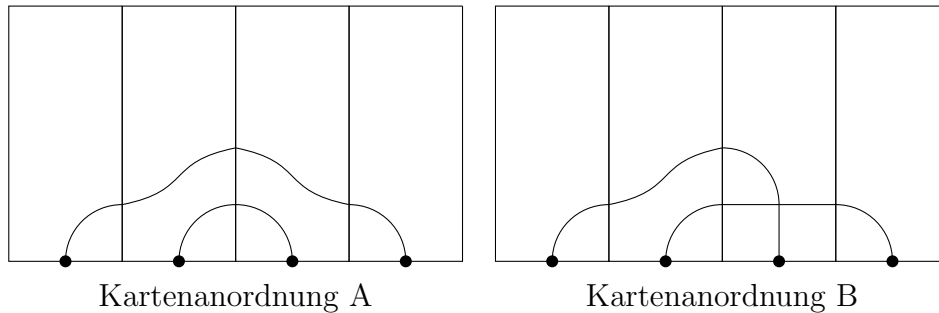
und der zugehörige Dyckpfad bestimmt sich wie folgt:



Wir werten nun manuell die Vakuumerwartung dieses Monoms (\*) mit Hilfe der Rechenregeln aus Definition 3.9 aus. Dazu betrachten wir

$$\begin{aligned} a(f_4)a(f_3)a^*(f_2)a^*(f_1)\Omega &= a(f_4)a(f_3)a^*(f_2)f_1 = a(f_4)a(f_3)f_2 \otimes f_1 \\ &= a(f_4)(q^0 \langle f_3|f_2 \rangle f_1 + q^1 \langle f_3|f_1 \rangle f_2) \\ &= \langle f_3|f_2 \rangle a(f_4)f_1 + q \langle f_3|f_1 \rangle a(f_4)f_2 \\ &= \langle f_3|f_2 \rangle \langle f_4|f_1 \rangle \Omega + q \langle f_3|f_1 \rangle \langle f_4|f_2 \rangle \Omega \\ &= (\langle f_1|f_4 \rangle \langle f_2|f_3 \rangle + q \langle f_1|f_3 \rangle \langle f_2|f_4 \rangle)\Omega \end{aligned} \tag{**}$$

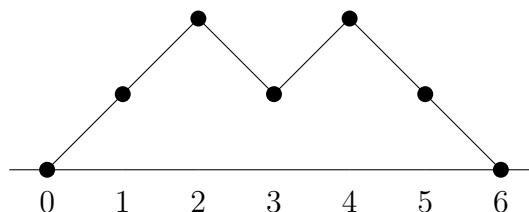
und stellen fest, dass die zwei resultierenden Summanden gerade den beiden zulässigen Kartenanordnungen



entsprechen: Der Summand  $\langle f_1|f_4 \rangle \langle f_2|f_3 \rangle$  (genauer gesagt die Indizes der  $f_i$ ) entspricht der Anordnung A (die zugehörige Paarpartition besitzt keine Kreuzungen, also gibt es in diesem Summand keinen  $q$ -Term) und  $q \langle f_1|f_3 \rangle \langle f_2|f_4 \rangle$  der Anordnung B ( $q = q^1$ , d.h. man zählt genau eine Kreuzung auf der Anordnung).

Man macht sich leicht klar, dass es hier keine weiteren Anordnungen gibt. Das Sortieren der Einträge der Skalarprodukte im letzten Schritt (\*\*) der Gleichung ist wegen der Symmetrie für  $f_i \in \mathcal{H}_0$  ( $\mathcal{H}_0$  war als reeller Hilbertraum vorausgesetzt worden) erlaubt.

Sei nun  $n = 6$  und die Folge  $\{\epsilon_i\}_{i=1}^6 = \{+1, +1, -1, +1, -1, -1\}$  mit zugehörigem Dyckpfad



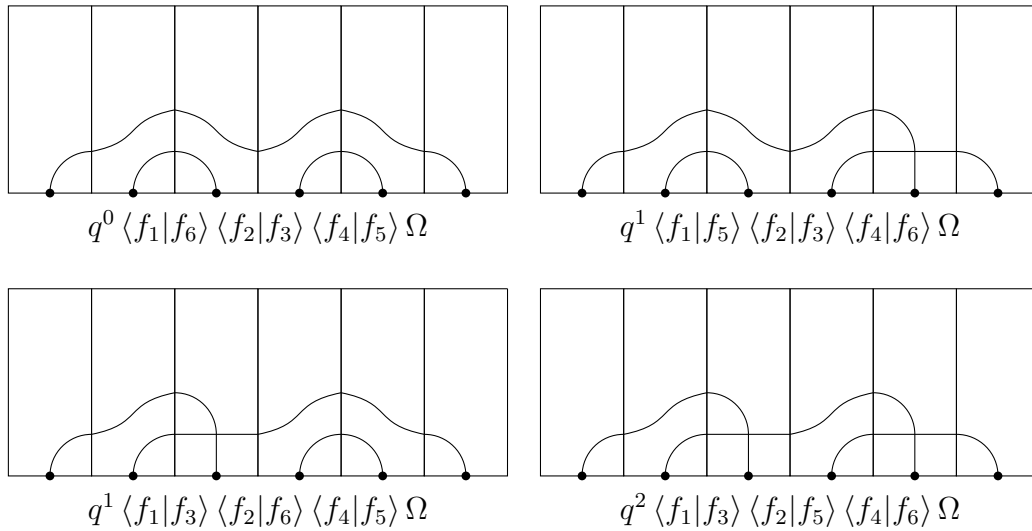
gegeben. Erneut expandieren wir manuell den Ausdruck der Vakuumerwartung:

$$\begin{aligned}
a(f_6)a(f_5)a^*(f_4)a(f_3)a^*(f_2)a^*(f_1)\Omega &= a(f_6)a(f_5)a^*(f_4)a(f_3)a^*(f_2)f_1 \\
&= a(f_6)a(f_5)a^*(f_4)a(f_3)f_2 \otimes f_1 \\
&= a(f_6)a(f_5)a^*(f_4)(q^0 \langle f_3|f_2 \rangle f_1 + q^1 \langle f_3|f_1 \rangle f_2) \\
&= a(f_6)a(f_5)(q^0 \langle f_3|f_2 \rangle a^*(f_4)f_1 + q^1 \langle f_3|f_1 \rangle a^*(f_4)f_2) \\
&= a(f_6)a(f_5)(q^0 \langle f_3|f_2 \rangle f_4 \otimes f_1 + q^1 \langle f_3|f_1 \rangle f_4 \otimes f_2) = \\
&= a(f_6) \left[ q^0 \langle f_3|f_2 \rangle a(f_5)f_4 \otimes f_1 + q^1 \langle f_3|f_1 \rangle a(f_5)f_4 \otimes f_2 \right] \\
&= a(f_6) \left[ q^0 \langle f_3|f_2 \rangle (q^0 \langle f_5|f_4 \rangle f_1 + q^1 \langle f_5|f_1 \rangle f_4) + \right. \\
&\quad \left. q^1 \langle f_3|f_1 \rangle (q^0 \langle f_5|f_4 \rangle f_2 + q^1 \langle f_5|f_2 \rangle f_4) \right] \\
&= q^0 \langle f_3|f_2 \rangle \left[ q^0 \langle f_5|f_4 \rangle a(f_6)f_1 + q^1 \langle f_5|f_1 \rangle a(f_6)f_4 \right] + \\
&\quad q^1 \langle f_3|f_1 \rangle \left[ q^0 \langle f_5|f_4 \rangle a(f_6)f_2 + q^1 \langle f_5|f_2 \rangle a(f_6)f_4 \right]
\end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt vier Summanden, die wir direkt in eine *geordnete* Darstellung bringen, wie wir es auch bereits im Beispiel mit  $n = 4$  (siehe (\*\*)) getan hatten:

$$\begin{aligned}
&q^0 \langle f_1|f_6 \rangle \langle f_2|f_3 \rangle \langle f_4|f_5 \rangle \Omega + q^1 \langle f_1|f_5 \rangle \langle f_2|f_3 \rangle \langle f_4|f_6 \rangle \Omega + \\
&q^1 \langle f_1|f_3 \rangle \langle f_2|f_6 \rangle \langle f_4|f_5 \rangle \Omega + q^2 \langle f_1|f_3 \rangle \langle f_2|f_5 \rangle \langle f_4|f_6 \rangle \Omega
\end{aligned}$$

Wir sehen erneut, dass die resultierenden Summanden mit den zulässigen Kartenanordnungen



in der oben abgebildeten Weise korrespondieren. Auch hier macht man sich schnell klar, dass keine weiteren Kartenanordnungen existieren. Denn die Positionen, auf denen Erzeugungskarten liegen, sind eindeutig belegt. Bei den obigen Anordnungen sind dies die Positionen 1, 2 und 4. Nur an den Positionen auf denen Vernichtungskarten liegen, ist es möglich die Anordnung zu variieren. Betrachte also die übrigen Positionen 3, 5 und 6.

An Position 3 liefert uns  $\epsilon$  das Level 2, es existieren also, wie auch in der Anordnung zu erkennen, zwei mögliche Wahlen für die Vernichtungskarte. Selbiges gilt auch für Position 5. Nur an Position 6 ist die Wahl eindeutig, denn das Level an dieser Stelle ist 1, d.h. es gibt nur eine verbleibende Linie, die vernichtet werden kann.



*Beweis zu Lemma 4.13.* Im vorigen Beispiel 4.25 hatten wir bereits gesehen, was beim Expandieren von Monomen der Länge  $n = 4$  und  $n = 6$  passiert. Wende nun das Verfahren aus 4.25 auf ein beliebiges Monom der Form  $\alpha_{2m}$  (siehe Lemma 4.6) an. Dann tritt an jeder Stelle, an der ein Vernichtungsoperator angewendet wird, eine  $k$ -fache *Verzweigung* auf, d.h. es muss eine Summe mit  $k$  Summanden ausgewertet werden. Dabei ist  $k$  das Level, welches durch die aus  $\epsilon$  konstruierte Levelfolge vorgegeben ist.

Genauer sei  $a(f_j)$  derjenige Operator, den wir im obigen Fall untersuchen. Wir betrachten  $l(j)$ , wobei  $l$  die in Definition 4.2 erklärte Levelfolge ist. Dann ist  $l(j)$  gerade das obige  $k$ , welches uns die Anzahl der Verzweigungen liefert. Da die Operatoren  $a^*(f)$  und  $a(f)$  linear sind, ist es möglich, die Summe zusammen mit den komplexen Vorfaktoren nach außen zu ziehen. Sei  $\beta$  der Elementartensor, auf den wir den Vernichtungsoperator anwenden wollen, d.h. wir betrachten einen Ausdruck der Form

$$a^{\epsilon(2m)}(f_{2m})a^{\epsilon(2m-1)}(f_{2m-1}) \cdots a^{\epsilon(j+1)}(f_{j+1})a^{\epsilon(j)}(f_j)\beta \quad (*)$$

und expandieren den Teil  $a^{\epsilon(j)}(f_j)\beta$ , wodurch wir nach Anwendung der Linearität den Ausdruck

$$\sum_{i=1}^k c_i \cdot a^{\epsilon(2m)}(f_{2m})a^{\epsilon(2m-1)}(f_{2m-1}) \cdots a^{\epsilon(j+1)}(f_{j+1})\beta_i \quad (c_i \text{ die komplexen Vorfaktoren})$$

erhalten. Die dortigen Elementartensoren  $\beta_i$  bestimmen sich aus  $\beta$  durch Auslassen der  $i$ -ten Komponenten (klar nach (4.5)). Jeder Term

$$a^{\epsilon(2m)}(f_{2m})a^{\epsilon(2m-1)}(f_{2m-1}) \cdots a^{\epsilon(j+1)}(f_{j+1})\beta_i$$

wird nun getrennt behandelt und nach *Vereinfachung* (Anwendung der Erzeugungsoperatoren) wieder dem obigen Verfahren zugeführt. Aus diesem Grund kann in (\*) auch  $\beta$  immer als Elementartensor angenommen werden.

Dieses Verfahren bricht ab, sobald alle Operatoren aufgebraucht sind. Man kombiniert nun die durch das Verfahren erzeugten Summen und die komplexen Vorfaktoren und erkennt, dass hier gerade über alle zulässigen Kartenanordnungen summiert wird. Wir erhalten also

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \sum_{CA \in \mathcal{CA}(\epsilon)} q^{\#\{\text{Kreuzungen auf CA}\}} \prod_{(i,j) \in \pi_{CA}} \langle f_i | f_j \rangle \Omega \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.22}}{=} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)} q^{cr(\pi)} \prod_{(i,j) \in \pi} \langle f_i | f_j \rangle \Omega \\ &= \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \Omega, \end{aligned}$$

denn Summation über die zulässigen Kartenanordnungen entspricht gerade dem Summieren über die zu  $\epsilon$  kompatiblen Paartitionen. Einsetzen des expandierten Ausdrucks in  $\langle \Omega, \cdot \rangle_q$  liefert wegen  $\|\Omega\|_q = 1$  die gewünschte Behauptung.  $\square$

#### Satz 4.26 ( $q$ -Wickformel)

Sei  $\{w_i : 1 \leq i \leq 2m\}$  ( $m \in \mathbb{N}_1$ ) eine Menge von reellen Positionsooperatoren, wie sie in Definition 3.26 eingeführt wurden, d.h.  $w_i = w(f_i)$  für Vektoren  $f_i \in \mathcal{H}_0$ . Dann gilt:

$$\mathbb{E}[w_{2m}w_{2m-1} \cdots w_2w_1] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2m)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi)$$

Wir nennen dies die *Wickformel* für  $q$ -deformierte Gauß'sche Zufallsvariablen.

Im Beweis der Wickformel hatten wir gesehen, dass die Voraussetzung  $f_i \in \mathcal{H}_0$  notwendig ist, da ansonsten im Allgemeinen nicht mehr  $\langle f_i | f_j \rangle = \langle f_j | f_i \rangle$  für  $i \neq j$  gilt. Setzt man natürlich  $f_i := f$  für alle  $1 \leq i \leq 2m$ , dann ist das Vertauschen im Skalarprodukt trivialerweise erlaubt. Unter diesen Voraussetzungen liefert also die  $q$ -Wickformel auch bei komplexem  $f \in \mathcal{H}$  ein Resultat.

Außerdem merken wir an, dass die  $q$ -Wickformel auch in den Randfällen  $q = \pm 1$  ihre Gültigkeit behält. Hier gilt es zu beachten, dass für  $q = 1$  der Positionsoperator nur noch ein unbeschränkter Operator mit dichtem Definitionsbereich  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{F}_1(\mathcal{H})$  ist. Da aber weiterhin  $\Omega \in \mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{H})$  gilt, können Produkte dieser unbeschränkten Operatoren immer noch auf das Vakuum projiziert werden.

*Beweis.* Insbesondere wollen wir anmerken, dass bei einer ungeraden Anzahl  $n$  von Positionsoperatoren der obige Erwartungswert verschwindet. Für  $n = 2m$  erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w_{2m}w_{2m-1} \cdots w_2w_1] &= \sum_{\epsilon \in \{\pm 1\}^n} \mathbb{E}[a^{\epsilon(n)}(f_n) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1)] \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.5}}{=} \sum_{\epsilon \text{ Catalan}} \mathbb{E}[a^{\epsilon(n)}(f_n) \cdots a^{\epsilon(1)}(f_1)] \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.13}}{=} \sum_{\epsilon \text{ Catalan}} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(\epsilon)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \\ &\stackrel{\text{Lem. 4.10}}{=} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2m)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \end{aligned}$$

und offensichtlich  $\mathbb{E}[w_n w_{2m-1} \cdots w_2 w_1] = 0$  für  $n$  ungerade, denn es existieren keine Catalanfolge mit ungerader Länge (für derartige  $\epsilon$  ist  $l(n) = 0$  nicht mehr möglich, wie aus Definition 4.2 ersichtlich ist).  $\square$

**Bemerkung 4.27** (Erinnerung an die Wigner'sche Halbkreisverteilung)

Wir erinnern uns, dass das Wigner'sche Halbkreisgesetz als Grenzverteilung bei großen symmetrischen Zufallsmatrizen auftaucht. Für reelles  $R > 0$  ist das *Wigner semicircle law* eine Verteilung mit Träger  $[-R, R]$  und Dichtefunktion

$$f_R(x) = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{auf } (-R, R)$$

und Null sonst. Da es sich hierbei um eine symmetrische Verteilung handelt, verschwinden die ungeraden Momente. Die geraden Momente jedoch lassen sich mit Hilfe der Catalanzahlen als

$$\mathbb{E}[X^{2m}] = \left(\frac{R}{2}\right)^{2m} C_m$$

angeben, wenn  $X$  eine bzgl.  $f_R$  verteilte Zufallsgröße ist.

**Beispiel 4.28** (Spezialfälle für die  $q$ -Wickformel)

Um die Verbindung zur freien Wahrscheinlichkeitstheorie zu ziehen, wollen wir als erstes den freien Fall, also  $q = 0$ , betrachten. Dort geben offensichtlich nur nichtkreuzende Paarpartitionen einen Beitrag zur Summe (siehe Bemerkung 2.2 (iv)), also erhält man

$$\mathbb{E}[w_{2m}w_{2m-1} \cdots w_2w_1] = \sum_{\pi \in \mathcal{NC}_2(2m)} \text{cov}(\pi).$$

Für den nächsten Spezialfall sei wieder  $q \in (-1, 1)$  beliebig. Wie wir bereits angemerkt hatten, ist auch der Fall  $w_i = w(f)$  für festes  $f \in \mathcal{H}$  interessant. Insbesondere wollen wir ein normiertes  $f$  betrachten, was sich im Kontext der Quantenmechanik (siehe Zustandsvektor, Definition 3.4) anbietet. Unter diesen Voraussetzungen vereinfacht sich die Kovarianz von  $\pi$  zu  $\text{cov}(\pi) = 1$  (siehe Bemerkung 4.12) und es entsteht die Formel

$$\mathbb{E}[w(f)^{2m}] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2m)} q^{cr(\pi)}.$$

Für den freien Fall bedeutet dies  $\mathbb{E}[w(f)^{2m}] = \#\mathcal{NC}_2(2m) = C_m$ , die  $m$ -te Catalanzahl. Offensichtlich besitzt der Positionsoperator  $w(f)$  gerade die Momente der Halbkreisverteilung aus Bemerkung 4.27 für  $R = 2$ .

Im nächsten Abschnitt 5 werden wir dann eine  $q$ -Deformation dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung betrachten und sie in Verbindung mit dem Positionsoperator  $w(f)$  bringen.

Zum Abschluß dieses Abschnittes gehen wir noch auf einige Faktorisierungseigenschaften des Vakuumzustands  $\mathbb{E}[\cdot]$  ein und zeigen, dass eine Faktorisierung nur unter sehr engen Rahmenbedingungen möglich ist.

**Lemma 4.29** (Faktorisierungsregeln bei Orthogonalität I)

Sind  $f_i \in \mathcal{H}_0$  orthogonale Vektoren, also  $f_i \perp f_j$  für alle  $i \neq j$ . Dann folgt für  $q \in (-1, 1)$ ,  $k \in \mathbb{N}_1$  beliebig

$$\mathbb{E}[w_k w_{k-1} \cdots w_1] = 0,$$

da alle Skalarprodukte im Ausdruck  $\text{cov}(\pi)$  verschwinden, d.h. identisch Null sind. Wir verwenden hier die bereits häufig verwendete Schreibweise  $w_j := w(f_j)$ . In der freien Wahrscheinlichkeitstheorie gelten einige Faktorisierungsregeln für den Zustand unter der Voraussetzung von *freien* Elementen (es gilt beispielsweise  $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ , wenn  $a$  und  $b$  frei sind). Wir betrachten einige Fälle für den Zustand  $\mathbb{E}$ , wo sich ähnliche Regeln ergeben.

Seien dazu  $f, g \in \mathcal{H}_0$  orthogonal und nicht-verschwindend sowie  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_1$ . Wir betrachten den Ausdruck

$$\mathbb{E}[w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}]$$

und definieren  $A := \{1, \dots, n_1\}$  sowie  $B := \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$ , sodass  $A \cup B = \{1, \dots, N\}$  mit  $N := n_1 + n_2$  gilt. Setze nun

$$f_j := \begin{cases} f & j \in A \\ g & j \in B \end{cases}$$

dann gilt die *expandierte* Form

$$\mathbb{E}[w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}] = \mathbb{E}[w_N w_{N-1} \cdots w_1].$$

Wende nun Satz 4.26 auf die rechte Seite der Gleichung an:

$$\mathbb{E}[w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(N)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(A \cup B)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \quad (*)$$

Nach Definition haben wir

$$\text{cov}(\pi) = \prod_{(i,j) \in \pi} \langle f_i | f_j \rangle$$

und können o.E.  $i < j$  im Paar  $(i, j) \in \pi$  annehmen. Untersuche das Skalarprodukt in der Kovarianz:

$$\langle f_i | f_j \rangle = \begin{cases} \|f\|^2 & : i, j \in A \\ \|g\|^2 & : i, j \in B \\ 0 & : i \in A, j \in B \end{cases}$$

Damit folgt  $\text{cov}(\pi) = 0$ , sobald ein Block  $(i, j) \in \pi$  existiert, der die Bereiche  $A$  und  $B$  miteinander verbindet, d.h. für den im Fall  $i < j$  die Aussage  $i \in A, j \in B$  gilt. Wir wollen dies als *Vernetzungseigenschaft* bezeichnen. Außerdem wollen wir anmerken, dass  $\mathcal{P}_2(B) \cong \mathcal{P}_2(n_2)$  ist, im Sinne einer ordnungserhaltenden Bijektion.

In der Summe aus (\*) geben also nur die Partitionen  $\pi$  einen Beitrag, die diese Vernetzungseigenschaft nicht erfüllen. Dies ist offensichtlich genau dann der Fall, wenn man  $\pi$  bzgl. der Zerlegung  $A \cup B$  in zwei separate Paarpartitionen aufteilen kann, d.h. ohne dass dabei Verbindungslinien zerstört werden. Die Idee ist nun, die Summe  $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(A \cup B)}$  mit dieser Eigenschaft in zwei Teile zu zerlegen, die dann einzeln betrachtet werden können. An dieser Stelle darf allerdings der Faktor  $q^{cr(\pi)}$  nicht übersehen werden. Dieser muss sich ebenfalls gutartig beim Splitten verhalten. Die *schwache Multiplikativität*, die wir in Definition 2.13 erklärt hatten, liefert aber genau die gewünschte Faktorisierungseigenschaft für  $q^{cr(\pi)}$ :

Haben wir Paarpartitionen  $\pi_1, \pi_2$  gegeben und fügen diese zu einer größeren Partition  $\pi := \pi_1 \cup \pi_2$  zusammen, so gilt  $q^{cr(\pi)} = q^{cr(\pi_1)} \cdot q^{cr(\pi_2)}$ . Damit erhalten wir nun

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(A \cup B)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(A)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi) \cdot \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(B)} q^{cr(\pi)} \text{cov}(\pi)$$

und folglich gilt

$$\mathbb{E}[w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}] = \mathbb{E}[w(f)^{n_1}] \cdot \mathbb{E}[w(g)^{n_2}].$$

In diesem Fall faktorisiert  $\mathbb{E}$  also in einen eleganten Ausdruck. Der nächstkompliziertere Fall ist ein Ausdruck der Form

$$\mathbb{E}[w(f)^{n_3} w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}] \quad (**)$$

für  $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}_1$ . Analog zum vorherigen Fall definieren wir

$$A := \{1, \dots, n_1\}, \quad B := \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}, \quad C := \{n_1 + n_2 + 1, \dots, n_1 + n_2 + n_3\},$$

derart dass  $A \cup B \cup C = \{1, \dots, N\}$  mit  $N := n_1 + n_2 + n_3$  gilt. Definiere wieder

$$f_j := \begin{cases} f & : j \in A \cup C \\ g & : j \in B \end{cases}$$

und betrachte  $(i, j) \in \pi \in \mathcal{P}_2(A \cup B \cup C)$  mit  $i < j$ . Dann folgt für das Skalarprodukt

$$\langle f_i | f_j \rangle = \begin{cases} \|f\|^2 & : i, j \in A \cup C \\ \|g\|^2 & : i, j \in B \\ 0 & : i \in A, j \in B \\ 0 & : i \in B, j \in C. \end{cases}$$

Damit verschwindet  $\text{cov}(\pi)$  also erneut, falls  $\pi$  die Vernetzungseigenschaft erfüllt, diesmal bzgl. der Bereiche  $A \cup C$  und  $B$ . Alle  $\pi$  ohne diese Eigenschaft, also diejenigen, die einen Beitrag

leisten, entstehen dadurch, dass eine Partition  $\pi_1$  aus  $\mathcal{P}_2(A \cup C) \cong \mathcal{P}_2(n_1 + n_3)$  bzgl. der vorliegenden Zerlegung in der Mitte aufgetrennt und dort eine Partition  $\pi_2$  aus  $\mathcal{P}_2(B) \cong \mathcal{P}_2(n_2)$  eingesetzt wird. Betrachtet man nun die *starke Multiplikativität* aus 2.13, so liefert diese gerade, dass der Faktor  $q^{cr(\pi)}$  auch unter diesen Bedingungen gutartig faktorisiert. Dies bedeutet also  $q^{cr(\pi_1)} \cdot q^{cr(\pi_2)} = q^{cr(\pi)}$ , wenn  $\pi$  die Partition bezeichnet, die durch das obige Verfahren gewonnen wird.

Analog zum ersten Fall folgt also auch hier die Faktorisierung des Ausdrucks (\*\*).

**Lemma 4.30** (Faktorisierungsregeln bei Orthogonalität II)

Die Regeln aus Lemma 4.29 konnte man deshalb herleiten, da sich in diesen Fällen der Ausdruck  $t_q(\pi) := q^{cr(\pi)}$  (siehe Bemerkung 2.14) multiplikativ verhält. Geht man allerdings zu Ausdrücken der Form

$$\mathbb{E}[w(g)^{n_4} w(f)^{n_3} w(g)^{n_2} w(f)^{n_1}]$$

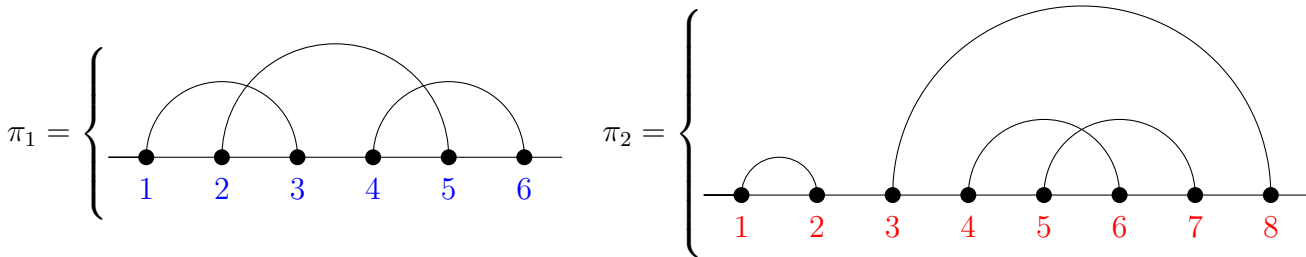
über  $(n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}_1)$ , so treten bereits erhebliche Probleme auf:

Analog zum vorherigen Lemma betrachtet wir wieder Partitionen ohne Vernetzungseigenschaft. Es gilt dann  $n_1 + n_3 = 2N_1$  sowie  $n_2 + n_4 = 2N_2$  für natürliche Zahlen  $N_1, N_2$ . Man macht sich schnell klar, dass für  $n_1 + n_3, n_2 + n_4$  beide ungerade alle betrachteten Partitionen die Vernetzungseigenschaft erfüllen. Dieser Fall ist dann allerdings trivial.

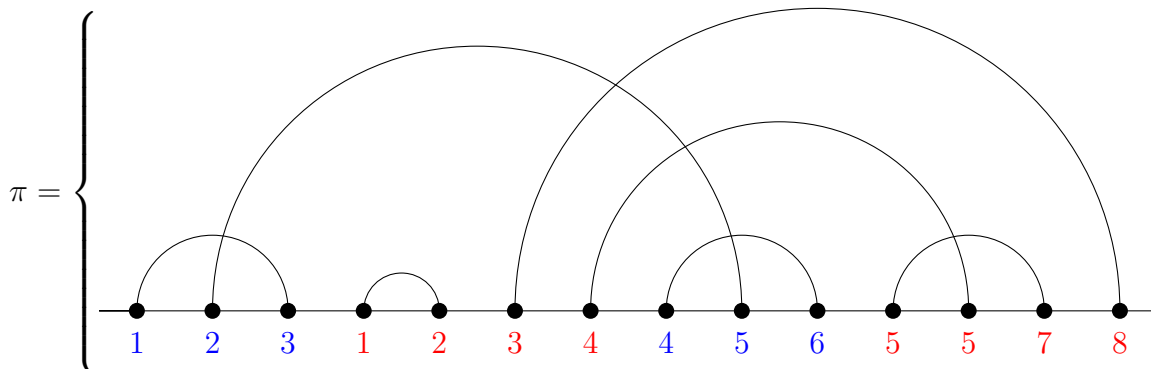
Seien also  $\pi_1 \in \mathcal{P}_2(2N_1), \pi_2 \in \mathcal{P}_2(2N_2)$  mit  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}_1$  gegeben, dann wählen wir  $K_1, K_2$  mit  $1 \leq K_i < N_i$  und betrachten die neue Partition

$$\pi := \pi'_1 \cup \pi'_2 \cup \pi''_1 \cup \pi''_2 .$$

Dabei sind  $\pi'_i := \pi_i|_{\{1, \dots, K_i\}}$  und  $\pi''_i := \pi_i|_{\{K_i+1, \dots, N_i\}}$  im *nicht-desktruktiven* Sinne definiert. Dies ist so zu verstehen, dass man  $\pi_i$  an einer Stelle auftrennt, dabei aber die Bögen, die die Blöcke der Partition bilden, erhält. Nachdem man beide Partitionen aufgetrennt hat, setzt man sie in *verzahnter* Weise wieder zusammen: Zuerst der vordere Teil von  $\pi_1$ , danach der vordere Teil von  $\pi_2$ , gefolgt vom hinteren Teil von  $\pi_1$  und als letztes den hinteren Teil von  $\pi_2$ . Offensichtlich ist dieses  $\pi$  wieder eine Paarpartition:



Das obige Verfahren würde in diesem Fall die Partition



liefern. Wir sehen, dass durch diese Konstruktion

$$cr(\pi) = cr(\pi_1) + cr(\pi_2) + C \quad (*)$$

mit  $C \in \mathbb{N}_0$  gilt, da beim Zusammenfügen zu  $\pi$  die Kreuzungen von  $\pi_1$  und  $\pi_2$  erhalten bleiben (kein Bogen wird getrennt). Es gilt nun dieses  $C$  zu bestimmen, d.h. wir suchen die Anzahl an zusätzlichen Kreuzungen, die beim Verzahnen der Partionen entstehen.

Definiere dazu den Ausdruck

$$C_i := \#\{(i, j) \in \pi_1 : i < j \text{ und } i \leq K_i < j\},$$

dann zählt  $C_i$  die Anzahl der *verbindenden Bögen* zwischen den Bereichen  $\pi'_i$  und  $\pi''_i$  von  $\pi_i$ . Aber es sind genau diese Art von Bögen, die zu neuen Kreuzungen von  $\pi$  führen: Jeder Bogen zwischen  $\pi'_1$  und  $\pi''_1$  schneidet sämtliche Bögen zwischen  $\pi'_2$  und  $\pi''_2$  genau ein Mal. Damit folgt  $C = C_1 \cdot C_2$  in  $(*)$  und somit auch

$$q^{cr(\pi)} = q^{cr(\pi_1)} \cdot q^{cr(\pi_2)} \cdot q^{cl(\pi_1, K_1) \cdot cl(\pi_2, K_2)}, \quad (**)$$

wobei wir hier  $cl(\pi_i, K_i) := C_i$  gesetzt haben. Ähnlich wie die Anzahl der Kreuzungen  $cr(\cdot)$  ist durch  $cl(\cdot)$  (*connecting lines*) eine Partitionsstatistik auf Paarpartitionen bei vorgegebenem Splitpunkt definiert. Leider sieht man hier, dass  $t_q(\pi)$  in diesen Situationen nicht sauber faktorisiert, da man den Term  $q^{cl(\pi_1, K_1) \cdot cl(\pi_2, K_2)}$  nicht trennen kann. Das Herleiten einer vergleichbaren Formel wie in Lemma 4.29 ist also nicht mehr möglich. Für allgemeines  $q \in (-1, 1)$  sind so anscheinend den Faktorisierungsmöglichkeiten enge Grenzen gesetzt.

**Bemerkung 4.31** (Allgemeine  $T$ -Deformation des Fockraums)

Die in diesem Abschnitt betrachtete  $q$ -Deformation des Fockraums ist ein Spezialfall einer sehr viel allgemeineren Deformation, die in [BS94] eingeführt wurde. Dort betrachtet man  $T \in B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H})$ , eine selbstadjungierte Kontraktion mit der Eigenschaft

$$(\mathbf{1} \otimes T)(T \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes T) = (T \otimes \mathbf{1})(\mathbf{1} \otimes T)(T \otimes \mathbf{1}),$$

wobei  $\mathbf{1} \otimes T$  bzw.  $T \otimes \mathbf{1}$  die *natürliche Erweiterung* des Operators  $T$  auf den Raum  $\mathcal{H}^{\otimes 3}$  ist. Durch induktive Erweiterung erhält man mit

$$T_i = \underbrace{\mathbf{1} \otimes \cdots \otimes \mathbf{1}}_{(i-1)\text{-mal}} \otimes T$$

eine Familie  $\{T_i \in B(\mathcal{H}^{\otimes(i+1)})\}$  von selbstadjungierten Kontraktionen, die die definierenden Relationen

$$\begin{aligned} T_i T_{i+1} T_i &= T_{i+1} T_i T_{i+1}, \\ T_i T_j &= T_j T_i \quad \text{falls } |i - j| \geq 2 \end{aligned}$$

der Zopfgruppe (*braid group*) erfüllen. Durch nochmalige Erweiterung (*amplification*) ist der Operator  $T_i$  natürlich auch auf allen  $n$ -Teilchenräumen  $\mathcal{H}^{\otimes j}$  mit  $j > i + 1$  erklärt. Man definiert nun ebenfalls zuerst den algebraischen Fockraum (siehe Definition 3.5) und verwendet anschließend die *freien* ( $q = 0$ ) Operatoren aus Bemerkung 3.21 als Ausgangsbasis der Deformation. Seien  $a_0(f)$  und  $a_0^*(f)$  diese freien Operatoren, so setzt man

$$\begin{aligned} a_T^*(f) &:= a_0^*(f) \\ a_T(f) &:= a_0(f)(\mathbf{1} + T_1 + T_1 T_2 + \cdots + T_1 T_2 \cdots T_{n-1}), \end{aligned}$$

wobei  $a_T(f)$  auf  $\mathcal{H}^{\otimes n}$  operiert. Da die  $T_i$ , wie oben angemerkt, auch auf  $\mathcal{H}^{\otimes j}$  mit  $j > i + 1$  definiert sind, ist diese Abbildungsvorschrift sinnvoll. Wie üblich wird der Operator nachher auf den ganzen, hier  $T$ -deformierten, Fockraum fortgesetzt. Man sieht, dass der Erzeugungsoperator, wie auch schon bei der  $q$ -Deformation, nicht verändert wird.

Nun gilt es wieder ein geeignetes Skalarprodukt einzuführen, derart dass die Operatoren  $a_T^*(f)$  und  $a_T(f)$  zueinander adjungiert sind. Sei  $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-1}\}$  die Menge der Nachbarschaftstranspositionen ( $\pi_i$  vertauscht die Elemente  $i$  und  $i + 1$ ) der symmetrischen Gruppe  $S_n$ . Diese Menge erzeugt bereits die  $S_n$ . Definiere nun den Homomorphismus

$$\varphi : S_n \longrightarrow B(\mathcal{H}^{\otimes n}) \quad \text{durch} \quad \varphi(\text{id}) = \mathbb{1}, \quad \varphi(\pi_i) = T_i$$

und definiere (vergleiche Satz 3.15) den Operator  $P_T$  durch

$$P_T(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varphi(\sigma)(f_1 \otimes \dots \otimes f_n).$$

Die durch  $\langle \xi | \eta \rangle_T = \langle \xi | P_T \eta \rangle_{\mathfrak{F}}$  ( $\xi, \eta \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ ) definierte Abbildung ist das gesuchte Skalarprodukt. Man kann zeigen, dass für  $\|T\| < 1$  der Operator  $P_T^{(n)}$  ( $P_T$  eingeschränkt auf  $\mathcal{H}^{\otimes n}$ ) strikt positiv ist. Die Vervollständigung des algebraischen Fockraums bzgl.  $\langle \cdot | \cdot \rangle_T$  ist der  $T$ -deformierte Fockraum.

Die  $q$ -Deformation geht als Spezialfall aus der  $T$ -Deformation hervor, wenn man

$$T : x \otimes y \mapsto q(y \otimes x) \quad (T \in B(\mathcal{H}^{\otimes 2}))$$

für  $q \in (-1, 1)$  setzt. Ein weiterer Spezialfall sind die 2-Parameterdeformationen (im Vergleich zur  $q$ -Deformation mit nur einem Parameter), die in [BY06] untersucht werden. Die dortige  $(q, s)$ -Deformation ist eine Verallgemeinerung der  $q$ -Deformation (für  $s = 1$  erhält man diese zurück). Auch können für diese Fälle erneut Wickformeln entwickelt werden, sogar mit derselben Methode über Kartenanordnungen wie bei der  $q$ -Deformation. Dabei reicht es, die Gewichte der Karten geeignet anzupassen. Allerdings tauchen in der expliziten Formel dann weitere Partitionsstatistiken auf, wie die Statistik der *inneren Punkte*, die bereits kurz in Definition 2.11 erwähnt wurde.





# 5 Spektralmaß und Verteilung

Nachdem wir im letzten Abschnitt auf kombinatorische Weise die Momente der auf dem  $q$ -Fockraum definierten Positionoperatoren  $w(f)$  berechnet haben, wollen wir diese Untersuchung nun fortsetzen. Dazu verlassen wir die kombinatorische Ebene und betrachten  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  bzw.  $(\Gamma_q(\mathcal{H}_0), \mathbb{E})$ , die in 3.26 definierte von-Neumann-Algebra, aus Sicht der Operatortheorie.

Insbesondere gilt unser Interesse dem sogenannten *Spektralmaß* der Positionoperatoren. Dieses Maß werden wir zuerst ohne Motivation durch die Angabe der zugehörigen Lebesgue-Dichte definieren sowie einige äquivalente Darstellungen angeben und beweisen. Auch soll eine kompakte Darstellung der Fouriertransformierten der Dichte durch Besselfunktionen formuliert werden.

Danach betrachten wir das Spektralmaß in Abhängigkeit des bisher impliziten Parameters  $q \in (-1, 1)$  und untersuchen das Verhalten für die Randfälle  $q = -1$  und  $q = 1$  sowie den Spezialfall  $q = 0$ . Für die Randfälle werden wir die zuvor gezeigten Darstellungen verwenden. Dafür benötigen wir unter anderem die Theorie der orthogonalen Polynome sowie einige Aussagen über die Klasse der *Thetafunktionen*. Anschließend führen wir die Konstruktion des Spektralmaßes durch und stellen damit die Verbindung zur bisherigen Untersuchung her.

## Definition 5.1 ( $q$ -Pochhammersymbol)

In Definition 2.1 hatten wir bereits einige  $q$ -Analoge betrachtet. Zum bekannten Pochhammersymbol existiert ebenfalls ein solches Analogon, welches wir als

$$(a; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) \quad \text{für } a \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}_1$$

setzen. Es ist möglich, den Ausdruck in ein unendliches Produkt zu erweitern. Hier schreiben wir

$$(a; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$$

und erhalten für  $|q| < 1$  eine in  $q$  analytische Funktion. Der Ausdruck kann alternativ als formale Potenzreihe in  $q$  aufgefasst werden. Diese Interpretation ist hier allerdings nicht notwendig, da in unserem Kontext die Bedingungen  $|q| < 1$  immer erfüllt ist.

Eine Verallgemeinerung auf mehrere Parameter in der ersten Komponente ist durch

$$(a_1, a_2, \dots, a_j; q)_n := (a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_j; q)_n$$

gegeben.

Die  $q$ -Variante des Pochhammersymbols ermöglicht die Darstellung der  $q$ -Fakultät. Ebenfalls gibt es Verbindungen zur Produkttripel-Identität von Jacobi und der Thetafunktion nach Ramanujan.

## Lemma 5.2 (Eigenschaften des $q$ -Pochhammersymbols)

Sei  $q \in (-1, 1)$  und  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Es gilt:

$$(i) [n]_q! = \frac{(q; q)_n}{(1-q)^n} \text{ für } n \in \mathbb{N}$$

$$(ii) (q; q)_\infty(-\frac{1}{z}; q)_\infty(-zq; q)_\infty = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} z^n$$

Dabei ist die Aussage (ii) ein Spezialfall (wähle  $a = zq$ ,  $b = \frac{1}{z}$ ) der Identität

$$f(a, b) = (-a; ab)_\infty(-b; ab)_\infty(ab; ab)_\infty \quad (5.1)$$

für  $|ab| < 1$  (dies ist bei uns wegen  $q = ab$  und  $|q| < 1$  erfüllt). Die Funktion  $f$  ist hierbei die oben genannte Thetafunktion, die meistens durch den Ausdruck

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{\frac{n(n+1)}{2}} b^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (5.2)$$

dargestellt wird. Der Definitionsbereich von  $f$  ist  $(a, b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ , derart dass  $|ab| < 1$  in (5.2) gilt.

Es existieren allerdings eine Vielzahl von Thetafunktionen (insbesondere die *Jacobi-Theta-funktionen*). Auf diesen Aspekt wollen wir jedoch erst später in Definition 5.7 eingehen.

*Beweis.* Die Aussage (i) ist einfaches Nachrechnen. Für die zweite Aussage verwenden wir die *Triple product identity* aus [Apo76, Theorem 14.6], die wie folgt formuliert ist:

Seien  $x, z \in \mathbb{C}$  mit  $|x| < 1$  und  $z \neq 0$  gegeben, so gilt

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^{2n})(1 + x^{2n-1}z^2)(1 + x^{2n-1}z^{-2}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x^{m^2} z^{2m}. \quad (*)$$

Ohne Einschränkung seien in Lemma 5.2 die Funktionsargumente  $a, b \neq 0$  (falls einer beiden Parameter  $a, b$  verschwindet, ist die Aussage trivial). Dann folgt die Identität (5.1) für die Ramanujan Thetafunktion  $f(a, b)$  auf  $\mathbb{R}_+$  aus (\*) durch die Transformation  $x^2 = ab$  und  $z^2 = \sqrt{\frac{b}{a}}$ . Analytische Fortsetzung liefert die Behauptung.  $\square$

**Bemerkung 5.3** (Standard-Hermitepolynome)

Die bekannten Hermitepolynome werden üblicherweise durch die explizite Darstellung

$$H_n(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n}{dx^n} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

definiert. Eine bekanntere Variante verzichtet auf die  $\frac{1}{2}$ -Normierung in der Exponentialfunktion. Wir wollen jedoch die Version *mit* Normierung betrachten, da mit dieser die Analogie zu den folgenden  $q$ -Hermitepolynomen offensichtlicher ist. Insbesondere lassen sich bei Kenntnis der ersten zwei Polynome

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = x$$

die Polynome höherer Ordnung durch die Rekursionsformel

$$H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$$

bestimmen. Mit der Gewichtsfunktion  $\omega(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  erfüllen die  $H_n$  die Orthogonalitätsrelation

$$\int_{\mathbb{R}} \omega(x) H_n(x) H_m(x) dx = n! \delta_{nm} \quad (n, m \in \mathbb{N}_0). \quad (5.3)$$

Anwendungen finden die Hermitepolynome insbesondere bei der Lösung der Schrödingergleichung des quantenharmonischen Oszillators.

**Definition 5.4** ( $q$ -deformiertes Spektralmaß)

Für  $q \in (-1, 1)$  ist das Maß  $\nu_q(dx)$  auf dem Intervall  $[-\frac{2}{\sqrt{1-q}}, +\frac{2}{\sqrt{1-q}}]$  durch

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \prod_{n=1}^{\infty} (1-q^n) |1 - q^n e^{2i\varphi}|^2 dx \quad (5.4)$$

definiert, wobei

$$x = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \cos(\varphi) \quad \text{für } \varphi \in [0, \pi] \text{ gilt.}$$

Dabei soll  $dx$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  sein. Also ist  $\nu_q$  ohne  $dx$  als die zugehörige Lebesgue-Dichte zu verstehen. In Lemma 5.10 werden wir zeigen, dass für alle  $|q| < 1$  durch  $\nu_q(dx)$  ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert wird. Die Betrachtung der Randfälle  $q = -1$  und  $q = 1$  zeigt, dass diese Aussage sogar für  $|q| \leq 1$  richtig ist, für  $q = -1$  allerdings nur in einer abgeschwächten Form (siehe Lemma 5.16).

Weiterhin soll in Satz 5.21 gezeigt werden, dass es sich bei  $\nu_q(dx)$  tatsächlich um ein Spektralmaß im Sinne der Operatortheorie handelt, nämlich um das des im vorigen Abschnitt definierten Positionsoptors. Zunächst soll  $\nu_q(dx)$  ohne diesen Kontext untersucht werden. Auf dem Umschlag dieser Arbeit ist ein dreidimensionaler *Plot* der  $q$ -Spektraldichte  $\nu_q(x)$  in Abhängigkeit von  $q$  und  $x$  zu finden.

**Definition 5.5** ( $q$ -Hermitepolynome)

Wir verzichten auf eine explizite Darstellung und geben lediglich eine rekursive Definition der  $q$ -Hermitepolynome  $H_n^{(q)}$  an. Dazu setzen wir

$$H_0^{(q)}(x) = 1, \quad H_1^{(q)}(x) = x$$

(analog zur Definition in 5.3) und verwenden danach die Rekursionsformel

$$H_{n+1}^{(q)}(x) = xH_n^{(q)}(x) - [n]_q H_{n-1}^{(q)}(x)$$

für alle weiteren Polynome  $H_n^{(q)}$  mit  $n \geq 2$ .

Im folgenden Beweis zeigen wir, dass die  $H_n^{(q)}$  ebenfalls eine Orthogonalitätsrelation

$$\int_{-\frac{2}{\sqrt{1-q}}}^{+\frac{2}{\sqrt{1-q}}} H_n^{(q)}(x) H_m^{(q)}(x) \nu_q(dx) = \delta_{n,m} [n]_q! \quad (5.5)$$

erfüllen, diesmal bzgl. des gerade eingeführten  $q$ -Spektralmaßes. Wir werden im Verlaufe beweisen, dass die Gleichung (5.5) für  $q \rightarrow 1$  in (5.3) übergeht.

Es gilt zu beachten, dass wir hier die *diskreten*  $q$ -Hermitepolynome betrachten. Eine andere Variante sind die *stetigen*  $q$ -Hermitepolynome nach L.J. Rogers. Bei diesen setzt man  $\bar{H}_0^{(q)}(x) = 1$ ,  $\bar{H}_1^{(q)}(x) = 2x$  und wählt die Rekursionsformel

$$\bar{H}_{n+1}^{(q)}(x) = 2x\bar{H}_n^{(q)}(x) - (1 - q^n)\bar{H}_{n-1}^{(q)}(x).$$

Wir merken an, dass dies tatsächlich in unterschiedlichen Arten von Polynomen resultiert, die nicht durch Renormalisierung auseinander hervorgehen.

In den Arbeiten [NAA02], [BI96] und [BI82] finden sich weitere Informationen über diese Klasse von deformierten Polynomen.

*Beweis.* Wir zeigen, dass die Polynome  $H_n^{(q)}(x)$  die Orthogonalitätsrelation (5.5) aus Definition 5.5 erfüllen. Dabei verwenden wir die Ergebnisse aus [AI84, Kapitel 3] über *Al-Salam-Chihara Polynome*, die als Spezialfall die  $q$ -Hermitopolynome liefern.

Die von Al-Salam und Chihara untersuchten Polynome

$$P_n(x) := P_n(x, q, a, b, c)$$

hängen von vier Konstanten  $q, a, b, c$  ab und erfüllen die Rekursionsgleichung

$$P_{n+1}(x) = (x - aq^n)P_n(x) - (c - bq^{n-1})(1 - q^n)P_{n-1}(x),$$

wobei  $P_0(x) := 1$  und  $P_1(x) := x - a$  gesetzt werden. Setzt man  $a = b = 0$  und  $c = \frac{1}{1-q}$ , so erhält man die Rekursionsgleichung aus Definition 5.5 zurück. Die diskreten  $q$ -Hermitopolynome sind also ein Spezialfall einer sehr viel größeren Klasse von Polynomen.

Die Polynome  $P_n(x)$  wurden erstmalig in [ASC76] definiert, dort zuerst ohne den Kontext der Orthogonalität. Es sind  $q, a, b$  und  $c$  komplexe Parameter mit  $q \neq 1$  und  $c - bq^{n-1} \neq 0$ . Damit eine Orthogonalitätsbedingung bezüglich eines reellwertigen Maßes auf der reellen Achse gelten kann, müssen jedoch die Parameter selbst alle reell sein. Darüberhinaus muss einer der folgenden vier Fälle eintreten:

- (i)  $|q| < 1$  und  $c > b \geq 0$
- (ii)  $0 < q < 1$  und  $c \geq 0 > b$
- (iii)  $-1 < q < 0$  und  $c > bq > 0$
- (iv)  $q > 1, b > c$  und  $b \geq 0$

Die Details findet man in [ASC76]; diese sind für uns an dieser Stelle allerdings nicht relevant. Wir beachten, dass in [AI84] nicht direkt mit den Polynomen  $P_n(x)$  gearbeitet wird, sondern mit der *renormalisierten* Variante

$$Q_n(x) := (q; q)_n^{-1} \cdot P_n(x),$$

wobei  $(q; q)_n = \prod_{k=1}^n (1 - q^k)$  das  $q$ -Pochhammersymbol (siehe Definition 5.1) ist. Für diese  $Q_n(x)$  erhält man das orthogonalisierende Maß zur Lebesgue-Dichte

$$\Psi'(x) = \frac{(b/c; q)_\infty}{2\pi(q; q)_\infty \sqrt{4c - x^2}} \left| \frac{(\beta/\alpha; q)_\infty (q; q)_\infty}{(\beta/\lambda)_\infty (\lambda/\mu)_\infty} \right|^2$$

mit

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2 - 4c}}{2c}, \quad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4c}}{2c}$$

$$\lambda = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2b}, \quad \mu = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2b}.$$

Orthogonalität bedeutet in diesem Kontext, dass Konstanten  $\lambda_n$  existieren, mit

$$\int_{\mathbb{R}} Q_n(x) Q_m(x) d\Psi(x) = \lambda_n \cdot \delta_{nm} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_0, \quad (*)$$

wobei  $\Psi(x)$  das *orthogonalisierende Maß* ist. Die Konstanten  $\lambda_n$  für die Al-Salam-Chihara Polynome haben die allgemeine Form

$$\lambda_n = \frac{c^n (b/c; q)_n}{(q; q)_n}.$$

In unserem Spezialfall vereinfacht sich dies zu  $\lambda_n^{-1} = (1 - q)^n (q; q)_n$ . Wir betrachten nun die Lebesgue-Dichte in diesem Spezialfall. Für  $a, b = 0$  (bzw.  $a, b \rightarrow 0$  mit geeignet gewählten Abhängigkeiten zwischen  $a$  und  $b$ ) erhalten wir

$$\frac{\beta}{\mu} = 0, \quad \frac{\beta}{\lambda} = 0, \quad \frac{\beta}{\alpha} = \frac{x - \sqrt{x^2 - 4c}}{x + \sqrt{x^2 - 4c}}$$

(für Details siehe [AI84, Abschnitt 3.5]). Folglich verschwinden die  $q$ -Pochhammersymbole  $(\beta/\lambda; q)_\infty = 1$ ,  $(\beta/\mu; q)_\infty = 1$  sowie  $(b/c; q)_\infty = 1$ .

An dieser Stelle verwenden wir die Transformation  $x = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \cos \vartheta$  aus Definition 5.4 mit  $\vartheta \in [0, \pi]$ . Mit der Wahl  $c = \frac{1}{1-q}$  gilt dann

$$\sqrt{4c - x^2} = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \sin \vartheta.$$

Einsetzen liefert uns

$$\alpha = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \exp(i\vartheta), \quad \beta = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \exp(-i\vartheta) \quad \implies \quad \frac{\beta}{\alpha} = \exp(-2i\vartheta)$$

und damit

$$(\beta/\alpha; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \exp(-2i\vartheta)q^k) \implies |(\beta/\alpha; q)_\infty|^2 = |1 - e^{-2i\vartheta}|^2 \cdot \prod_{k=1}^{\infty} |1 - q^k e^{-2i\vartheta}|^2.$$

Mit  $|1 - e^{-2i\vartheta}|^2 = 2 - 2\cos(2\vartheta) = 4\sin^2(\vartheta)$  folgt letztendlich

$$\begin{aligned} \Psi'(x) &= \frac{1}{2\pi(q; q)_\infty \sqrt{4c - x^2}} |(q; q)_\infty|^2 |(\beta/\alpha; q)_\infty|^2 \\ &\stackrel{|q| \leq 1}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{4\pi \sin(\vartheta)} (q; q)_\infty 4\sin^2(\vartheta) \prod_{k=1}^{\infty} |1 - q^k e^{-2i\vartheta}|^2 = \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\vartheta) \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) |1 - q^k e^{-2i\vartheta}|^2, \end{aligned}$$

also genau die  $q$ -deformierte Spektraldichte aus Definition 5.4.

Der verbleibende Schritt besteht nun noch darin, die Konstanten  $\lambda_n$  in (\*) zu betrachten, da das Ergebnis momentan nur für die renormalisierten Polynome gilt. Kehren wir die Renormalisierung um, so erhalten wir

$$(q; q)_n^2 \lambda_n = \frac{(q; q)_n^2}{(1-q)^n (q; q)_n} = \left( \prod_{k=1}^n \frac{1}{1-q} \right) \left( \prod_{k=1}^n 1 - q^k \right) = [n]_q!.$$

Da  $P_n(x) = H_n^{(q)}(x)$  (für  $a = b = 0$ ,  $c = \frac{1}{1-q}$ ) ist, liefert dies genau (5.5) und wir sind fertig.  $\square$

Der obige Beweis verdeutlicht, dass aus der Wahl  $c = \frac{1}{4}$  und einer Renormalisierung der  $P_n(x)$  durch den Faktor  $2^n$  die stetige Variante der  $q$ -Hermitepolynome resultiert. Auch wird hieraus deutlich, dass eine einfache Renormalisierung nicht ausreicht, um die Polynome ineinander zu überführen.

**Lemma 5.6** (Darstellungen von  $\nu_q$ )

Sei  $q \in (-1, 1)$  fest gewählt, dann ist die Transformation  $\cos(\varphi) = x \frac{\sqrt{1-q}}{2}$  ( $\varphi \in [0, \pi]$ ) für alle  $x \in [-\frac{2}{\sqrt{1-q}}, +\frac{2}{\sqrt{1-q}}]$  definiert. Wir geben vier Darstellungen an:

- (i) Setze  $\gamma = \exp(i\varphi)$ . Dann gilt  $\gamma + \bar{\gamma} = 2 \cos(\varphi) = x\sqrt{1-q}$  sowie  $\gamma - \bar{\gamma} = 2i \sin(\varphi)$ . Unter Verwendung des  $q$ -Pochhammersymbols aus Definition 5.1 bringen wir  $\nu_q(dx)$  in die Form

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) (q; q)_\infty (q\gamma^2; q)_\infty (q\gamma^{-2}; q)_\infty dx. \quad (5.6)$$

- (ii) Weitere Transformation des Ausdrucks aus (i) liefert eine Darstellung in der Form einer Laurentreihe:

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{-2n} dx. \quad (5.7)$$

Das Lemma 5.8 wird zeigen, dass dieser Ausdruck eine modifizierte Thetafunktion mit Vorfaktoren ist.

- (iii) Umformung der Laurentreihe aus (ii) in eine Reihe und Substitution von  $dx$  durch  $d\varphi$  liefert eine Darstellung mit Sinustermen:

$$\nu_q(dx) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) d\varphi \quad (5.8)$$

Diese Darstellung wird hilfreich sein, um die Normierung von  $\nu_q(dx)$  nachzuweisen. Dabei ist (5.8) so zu verstehen, dass bei Integration eines Ausdrucks der Form  $\int f d\nu_q$  nach Substitution mit  $\varphi$  der Term  $d\nu_q$  in (5.8) übergeht.

- (iv) Eine vierte Darstellung mittels der *Chebyshev-Polynome*  $U_k$  durch den Ausdruck

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} \sqrt{4 - (1-q)x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U_{2n-2} \left( \frac{x\sqrt{1-q}}{2} \right) dx \quad (5.9)$$

verzichtet auf die Verwendung der  $\cos(\varphi)$ -Transformation. Hier ist  $U_k$  das  $k$ -te Chebyshev-Polynom vom Typ 2, d.h. es ist durch die Vorschrift

$$U_k(\cos(\theta)) = \frac{\sin((k+1)\theta)}{\sin(\theta)}$$

bestimmt. Diese Darstellung wird in [Sza09, Expansion of  $f_H$ ] hergeleitet, unter anderem um Folgen von unabhängig identisch  $\nu_q(dx)$ -verteilten Zufallsvariablen zu simulieren.

Eine interessante Feststellung ist, dass Darstellung (iv) für  $q = -1$  eine Art *alternierenden Fejér-Kern* liefert. Wegen  $U_{2k}(\cos(y/2)) = D_k(y)$  ( $D_k$  der  $k$ -te Dirichlet-Kern) geht (5.9) in den Ausdruck

$$\frac{1}{\pi} \sqrt{2-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{(n+2)(n-1)}{2}} D_{n-1}(\cos(2\varphi)) dx$$

über. Der Fejér-Kern wird üblicherweise durch

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k(x)$$

definiert und stellt eine *approximierende Eins* dar. In der Tat werden wir bei der Betrachtung der Randfälle feststellen, dass für  $q = -1$  ein Dirac-Maß entsteht. Leider scheint ein direkter Ansatz mit modifizierten Fejér-Kernen schlussendlich nicht zum Erfolg zu führen.

*Beweis.*

(i) Nach Definition 5.1 gilt

$$\begin{aligned} (q; q)_\infty (q\gamma^2; q)_\infty (q\gamma^{-2}; q)_\infty &= \prod_{k=0}^{\infty} (1 - qq^k)(1 - q\gamma^2 q^k)(1 - q\gamma^{-2} q^k) \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k)(1 - \gamma^2 q^k)(1 - \gamma^{-2} q^k) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) |1 - \gamma^2 q^k|^2. \end{aligned}$$

Einsetzen in (5.4) liefert uns die Formel (5.6). Die Umordnung im ersten Schritt ist wegen  $|q| < 1$  erlaubt.

(ii) Wir zeigen zuerst  $(q\gamma^2; q)_\infty (1 - \gamma^2) = (\gamma^2; q)_\infty$  und verwenden danach Aussage (ii) aus Lemma 5.2. Es gilt also

$$(q\gamma^2; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \gamma^2 q^{k+1}) = \frac{1}{1 - \gamma^2 q^0} \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \gamma^2 q^k) = \frac{1}{1 - \gamma^2} (\gamma^2; q)_\infty.$$

Nun definiere  $z = -\gamma^{-2}$  (dann gilt insbesondere  $-\frac{1}{z} = \gamma^2$ ) und erhalte

$$\begin{aligned} (q; q)_\infty (q\gamma^2; q)_\infty (q\gamma^{-2}; q)_\infty &\stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{1 - \gamma^2} (q; q)_\infty (\gamma^2; q)_\infty (q\gamma^{-2}; q)_\infty \\ &= \frac{1}{1 - \gamma^2} (q; q)_\infty (-z^{-1}; q)_\infty (-zq; q)_\infty \\ &\stackrel{5.2}{=} \frac{1}{1 - \gamma^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} (-\gamma^{-2})^n = \frac{1}{1 - \gamma^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{-2n}. \end{aligned}$$

Erneut liefert Einsetzen die Behauptung. Beachte, dass die linke Seite des obigen Ausdrucks symmetrisch unter der Transformation  $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$  ist. Es gilt also insbesondere

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1 - \gamma^{-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} dx. \quad (5.10)$$

(iii) Wir zeigen zuerst

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} = 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \sin(\varphi(2n+1)) \quad (*)$$

und verwenden (\*) anschließend in der Formel (5.7), um die Behauptung zu zeigen. Im Prinzip wird in der folgenden Rechnung ausgenutzt, dass der Ausdruck  $\frac{1}{8}(2n+1)^2$  unter der Transformation  $n \mapsto -n$  und der anschließenden Indexverschiebung in (\*\*) invariant

bleibt.

$$\begin{aligned}
& \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{-n} q^{\frac{1}{8}(2n-1)^2} \gamma^{2(-n)+1} \\
&\stackrel{(**)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(-2n-1)^2} \gamma^{-2n-1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} (\gamma^{2n+1} - \gamma^{-(2n+1)}) = 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \sin(\varphi(2n+1))
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir das Resultat  $\gamma - \gamma^{-1} = 2i \sin(\varphi)$  aus Lemma 5.6 (i) verwendet. Wegen  $x = \frac{2}{\sqrt{1-q}} \cos(\varphi)$  ( $q \in (-1, 1)$ ) erhalten wir die Substitution

$$\frac{dx}{d\varphi} = -\frac{2}{\sqrt{1-q}} \sin(\varphi).$$

Damit formen wir die Formel (5.10) um. Mit  $\frac{1}{8}(2n+1)^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{8}$  folgt:

$$\begin{aligned}
\nu_q(dx) &= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} dx \\
&= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} \frac{-2}{\sqrt{1-q}} \sin(\varphi) d\varphi \\
&= -\frac{2 \sin^2(\varphi)}{\pi (1-\gamma^{-2})} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2 - \frac{1}{8}} \gamma^{(2n+1)-1} d\varphi \\
&= -\frac{2}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \frac{\sin^2(\varphi)}{\gamma(1-\gamma^{-2})} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} d\varphi \\
&= -\frac{2}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \frac{\sin^2(\varphi)}{2i \sin(\varphi)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \gamma^{2n+1} d\varphi
\end{aligned}$$

Wende nun die Transformation aus (\*\*) an und erhalte die Behauptung:

$$\begin{aligned}
\nu_q(dx) &= -\frac{2}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \sin(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{1}{8}(2n+1)^2} \sin(\varphi(2n+1)) d\varphi \\
&= -\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) d\varphi
\end{aligned}$$

Der Term  $q^{-\frac{1}{8}}$  bereitet, auch für negative  $q$ , keine Probleme. Siehe dazu auch die kommende Bemerkung 5.9.

(iv) Für den Beweis der letzten Darstellung kopieren wir den Beweis von (iii), verzichten jedoch auf die Substitution. Wir benötigen darüberhinaus folgende Ergebnisse:

$$(1) U_{2k-2}\left(\frac{x\sqrt{1-q}}{2}\right) = \frac{\sin((2k-1)\varphi)}{\sin(\varphi)}$$

$$(2) x^2 = \frac{4}{1-q}(1 - \sin^2(\varphi))$$



$$(3) \quad \sqrt{4 - (1 - q)x^2} = 2 \sin(\varphi)$$

Dabei ist (1) Anwendung der definierenden Relation der Chebyshev-Polynome, (2) die Verwendung der trigonometrischen Identität  $\sin(\arccos(\alpha)) = \sqrt{1 - \alpha^2}$  und (3) eine direkte Folgerung aus (2). Damit folgt nun

$$\begin{aligned} \nu_q(dx) &= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} dx \\ &= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \frac{\sin(\varphi)}{\sin(\varphi)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin(\varphi(2n+1)) dx \\ &= \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} 2 \sin(\varphi) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\sin(\varphi(2n+1))}{\sin(\varphi)} dx \\ &\stackrel{(3)}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} \sqrt{4 - (1-q)x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \frac{\sin(\varphi(2n-1))}{\sin(\varphi)} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} \sqrt{4 - (1-q)x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} q^{\frac{n(n-1)}{2}} U_{2n-2} \left( \frac{x\sqrt{1-q}}{2} \right) dx \end{aligned}$$

und somit die Behauptung. □

**Definition 5.7** (Jacobi Thetafunktion und ihre Varianten)

Wie bereits erwähnt, gibt es eine große Klasse von Thetafunktionen. Die wohl gängigste Form ist durch

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z)$$

gegeben. Dabei ist  $z \in \mathbb{C}$  und  $\tau \in \mathbb{H}$  mit  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$ , die obere komplexe Halbebene. Auf  $\mathbb{C} \times \mathbb{H}$  ist  $\vartheta(z, \tau)$  *normal konvergent* (siehe [Kö04, Kapitel 7.3]).

Ebenfalls von Interesse sind die Thetafunktionen mit halber Periode (*half-period theta functions*):

- $\vartheta_{01}(z, \tau) = \vartheta(z + \frac{1}{2}, \tau)$
- $\vartheta_{10}(z, \tau) = \exp(\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i z) \vartheta(z + \frac{1}{2}\tau, \tau)$
- $\vartheta_{11}(z, \tau) = \exp(\frac{1}{4}\pi i \tau + \pi i(z + \frac{1}{2})) \vartheta(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau)$

Der Vollständigkeit halber definiert man  $\vartheta_{00}(z, \tau) = \vartheta(z, \tau)$ . Die ursprüngliche Formulierung der Thetafunktionen durch Jacobi benutzte den Ausdruck  $p = \exp(\pi i \tau)$  anstatt  $\tau$ . Dies liefert vier weitere Funktionen:

- $\theta_1(z, p) = -\vartheta_{11}(z, \tau)$
- $\theta_2(z, p) = \vartheta_{10}(z, \tau)$
- $\theta_3(z, p) = \vartheta_{00}(z, \tau)$
- $\theta_4(z, p) = \vartheta_{01}(z, \tau)$

Wir wollen  $\vartheta(z, \tau)$  als die *Standard-Thetafunktion* bezeichnen.

**Lemma 5.8** ( $\nu_q(dx)$  als Thetafunktion)

Für  $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  haben wir die folgende Darstellung des  $q$ -Spektralmaßes als Thetafunktion:

$$\nu_q(dx) = \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} q^{-\frac{1}{8}} \theta_1\left(\frac{\varphi}{\pi}, \sqrt{q}\right) dx$$

Für  $q \rightarrow 0$  ist diese Darstellung ebenfalls korrekt. Da der Logarithmus an dieser Stelle jedoch nicht sinnvoll definiert werden kann, sowie  $\nu_q$  für  $q = 0$  in eine sehr einfache Form übergeht (siehe Beispiel 5.14), klammern wir diesen Fall aus.

**Bemerkung 5.9** (Notation in Lemma 5.8)

In der obigen Darstellung muss erklärt werden, wie die Ausdrücke  $\sqrt{q}$  sowie  $q^{-\frac{1}{8}}$  zu verstehen sind (da  $q < 0$  erlaubt ist). Hierzu wählen wir  $\log_{\mathbb{C}}$  als *einen* komplexen Logarithmus, z.B. durch

$$\log_{\mathbb{C}}(x) = \log_{\mathbb{R}}(-x) + i\pi \quad \text{für } x \in \mathbb{R}_{<0}.$$

Dann sind  $\sqrt{q} := q^{\frac{1}{2}}$  und  $q^{-\frac{1}{8}}$  als

$$q^{\frac{1}{k}} = \exp\left(\frac{1}{k} \log_{\mathbb{C}}(q)\right), \quad k \in \{2, -8\} \quad (5.11)$$

zu verstehen. Im Folgenden und insbesondere im anschließenden Beweis von Lemma 5.8 werden wir immer  $\log = \log_{\mathbb{C}}$  betrachten. Desweiteren ist der Parameterübergang  $p = \exp(\pi i \tau)$  beim Wechseln von der Thetafunktion  $\theta_1$  zu  $\vartheta_{11}$  zu beachten, da man letztendlich mit der Standardform rechnet. Das  $\nu_q$  geht hierbei in

$$\nu_q(dx) = -\frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} q^{-\frac{1}{8}} \vartheta_{11}\left(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{1}{2\pi i} \log(q)\right) dx$$

über. Im Beweis wird offensichtlich, dass die Wahl des Logarithmuszweiges keine Rolle spielt.

*Beweis.* Wir berechnen zuerst getrennt die beiden Terme von  $\vartheta_{11}(z, \tau)$  für  $z = \frac{\varphi}{\pi}$  und  $\tau = \frac{1}{2\pi i} \log(q)$  und setzen danach den endgültigen Ausdruck zusammen.

$$\begin{aligned} \vartheta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau\right) &= \vartheta\left(\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{1}{2\pi i} \log(q) + \frac{1}{2}, \frac{1}{2\pi i} \log(q)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\pi i n^2 \frac{1}{2\pi i} \log(q) + 2\pi i n \left(\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{4\pi i} \log(q) + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{n^2}{2} \log(q) + 2in\varphi + \frac{n}{2} \log(q) + \pi in\right) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{n^2+n}{2} \log(q)\right) \exp(2in\varphi) \exp(\pi in) \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(\log(q)) \frac{n(n+1)}{2} \exp(i\varphi)^{2n} \exp(\pi i)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Der exponentielle Faktor vereinfacht sich zu:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i\left(z + \frac{1}{2}\right)\right) &= \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\frac{1}{2\pi i}\log(q) + \pi i\left(\frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2}\right)\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{8}\log(q) + i\varphi + \frac{\pi i}{2}\right) \\
&= \exp\left(\frac{1}{8}\log(q)\right) \exp(i\varphi) \exp\left(\frac{1}{2}\pi i\right) \\
&\stackrel{(**)}{=} q^{1/8}\gamma i
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Die Umformung im Schritt (\*) ist insbesondere wegen  $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{Z}$  erlaubt. In (\*\*) nutzen wir (5.11) aus der vorigen Bemerkung aus.

Wegen der Symmetrie in (5.6) (tausche  $\gamma$  mit  $\gamma^{-1}$ ) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\nu_q(dx) &= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi)(q; q)_\infty (q\gamma^2; q)_\infty (q\gamma^{-2}; q)_\infty dx \\
&= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \gamma^{2n} dx \\
&\stackrel{(5.12)}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} \vartheta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau\right) \\
&\stackrel{(5.13)}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} \sin(\varphi) \frac{1}{1-\gamma^{-2}} q^{-\frac{1}{8}} \gamma^{-1} i^{-1} \exp\left(\frac{1}{4}\pi i\tau + \pi i\left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau\right) \\
&\stackrel{\text{Def. 5.7}}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \sin(\varphi) \frac{i}{\gamma - \gamma^{-1}} (-1) \vartheta_{11}\left(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{1}{2\pi i} \log(q)\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \sin(\varphi) \frac{i}{\gamma - \bar{\gamma}} \theta_1\left(\frac{\varphi}{\pi}, \sqrt{q}\right) \stackrel{5.6(i)}{=} \frac{\sqrt{1-q}}{\pi} q^{-\frac{1}{8}} \sin(\varphi) \frac{i}{2i \sin(\varphi)} \theta_1\left(\frac{\varphi}{\pi}, \sqrt{q}\right) \\
&= \frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} q^{-\frac{1}{8}} \theta_1\left(\frac{\varphi}{\pi}, \sqrt{q}\right),
\end{aligned}$$

unsere Behauptung.

Wie bereits erwähnt, sieht man hier, dass die Wahl des komplexen Logarithmus keinen Einfluss auf die Rechnung hat.  $\square$

**Lemma 5.10** ( $\nu_q(dx)$  ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß)

Für alle  $|q| < 1$  gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \nu_q(dx) = 1,$$

also ist  $\nu_q(dx)$  tatsächlich ein W-Maß.

*Beweis.* Wir verwenden zum Beweis die Darstellung von  $\nu_q(dx)$  aus Lemma 5.6 (iii). Wir wollen zuerst festhalten, dass  $\nu_q(dx)$  nur auf  $[-\frac{2}{\sqrt{1-q}}, +\frac{2}{\sqrt{1-q}}]$  nicht-verschwindend ist und dass dieses

Intervall durch die Transformation  $x \mapsto \varphi$  in das Intervall  $[0, \pi]$  übergeht. Es folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \nu_q(dx) &= \int_{-\frac{2}{\sqrt{1-q}}}^{+\frac{2}{\sqrt{1-q}}} \nu_q(dx) = - \int_{\pi}^0 \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) d\varphi \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_0^{\pi} \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) d\varphi \\ &\stackrel{(**)}{=} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \frac{\pi}{2} \delta_{n,0} = \frac{2}{\pi} (-1)^0 q^0 \frac{\pi}{2} = 1 \end{aligned}$$

wobei wir im Schritt  $(**)$  die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_0^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \frac{\pi}{2} \delta_{n,m} \quad \forall m, n \in \mathbb{N}_1$$

des Sinus verwenden. Die Vertauschung von Reihe und Integral in  $(*)$  folgt mit gleichmäßiger Konvergenz.  $\square$

**Bemerkung 5.11** (Fouriertransformation und die Poisson-Summenformel)

Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion aus  $L^1(\mathbb{R})$ , die zusätzlich stetig und beschränkt ist. Dann ist die *kontinuierliche Fouriertransformation (FT)* von  $f$  durch

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

definiert (und  $\hat{f}$  ist insbesondere beschränkt). Falls  $\hat{f}$  erneut in  $L^1(\mathbb{R})$  liegt, gilt umgekehrt

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\omega) \exp(it\omega) d\omega,$$

d.h.  $\hat{\hat{f}}(\omega) = f(-\omega)$ . Die FT ist also bis auf ein Vorzeichen im Argument selbstinvers.

Sei nun darüberhinaus  $f$  stückweise stetig differenzierbar mit der Ausnahme endlich vieler Punkte. Setze

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x) & : f \text{ besitzt Ableitung an der Stelle } x \\ 0 & : \text{sonst,} \end{cases}$$

so sollen  $x^2 f(x)$  und  $x^2 \varphi(x)$  beschränkt sein. Unter diesen Voraussetzungen gilt die *Poisson-Summenformel*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k),$$

die unter anderem eine wichtige Transformationsformel für die Thetafunktion liefert. Insbesondere erfüllt die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a > 0$

$$f(t) := \exp\left(-a \frac{t^2}{2}\right)$$

die Voraussetzungen der Fouriertransformation und geht unter dieser in

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{1}{a} \frac{\omega^2}{2}\right)$$

über. Sei  $t_0 \in \mathbb{R}$  und  $g(t) := f(t - t_0)$ , dann gilt die *Verschiebungsregel*

$$\hat{g}(\omega) = \exp(-it_0\omega)\hat{f}(\omega) = \frac{\exp(-it_0\omega)}{\sqrt{a}} \exp\left(-\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{2}\right).$$

Setzen wir  $h(t) := \exp(-\frac{a}{2}(t - c)^2)$ , so ist durch analytische Fortsetzung die Verschiebungsregel auch für  $c \in \mathbb{C}$  anwendbar und wir erhalten somit

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{a}} \exp(-ic\omega) \exp\left(-\frac{1}{a}\frac{\omega^2}{2}\right).$$

*Beweis.* Siehe Kapitel 3.3 in [Dei05] (insbesondere *Theorem 3.3.1*) für die Theorie über Fouriertransformation und Kapitel 3.6 für die Poisson-Summenformel.  $\square$

**Satz 5.12** (Fouriertransformation der  $q$ -Spektraldichte)

Sei  $J_\alpha(x)$  die Besselfunktion vom ersten Typ, die durch

$$J_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \cdot \Gamma(m + \alpha + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha},$$

(für uns reicht der Definitionsbereich  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ) definiert ist. Dann lässt sich die Fouriertransformierte der Dichtefunktion  $\nu_q(x)$  für  $q \in (-1, 1)$  durch

$$\sqrt{2\pi}\hat{\nu}_q(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \left( J_{2n}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{1-q}}\right) + J_{2n+2}\left(\frac{2\omega}{\sqrt{1-q}}\right) \right)$$

darstellen. Für den Beweis benötigen wir einige Hilfsaussagen. Weitere Aussagen über Besselfunktionen mit ganzzahligem Parameter  $\alpha$  sind in [AS64, Kapitel 9] zu finden. Die obige Definition ist eine Umformulierung der dortigen Formel 9.1.10.

**Lemma 5.13** (Vorbereitungen zum Beweis von Satz 5.12)

(i) Für all  $n \in \mathbb{N}_0$  und alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt

$$\cos^n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos((n - 2k)x).$$

(ii) Definieren wir die Abbildung  $\gamma : \mathbb{Z} \rightarrow \{0, \pm 1\}$  durch

$$\gamma(z) := \begin{cases} 0 & : z = 0 \\ \text{sign}(z) & : z \neq 0 \end{cases},$$

dann gilt für alle  $n, m \in \mathbb{Z}$  die Orthogonalitätsrelation

$$\int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx) dx = \gamma(n)\gamma(m) \frac{\pi}{2} \delta_{|n|,|m|}.$$

(iii) Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $j \in \{0, \dots, k\}$ . Setzen wir

$$\alpha_{n,k,j} := \int_0^\pi \sin(\varphi(2n + 1)) \sin(\varphi) \cos(\varphi(k - 2j)) d\varphi,$$

so gilt

$$\sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \alpha_{n,2k,j} = \frac{\pi}{2} \left[ \delta_{k \geq n} \binom{2k}{k+n} - \delta_{k \geq n+1} \binom{2k}{k+n+1} \right]$$

und  $\alpha_{n,k,j} = 0$  falls  $k$  ungerade ist. Die Faktoren  $\delta_{a \geq b}$  sind durch

$$\delta_{a \geq b} = \begin{cases} 1 & : a \geq b \\ 0 & : a < b \end{cases}$$

definiert.

- (iv) Wir betrachten die Besselfunktion  $J_\alpha(x)$  aus Satz 5.12. Seien  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$  und  $|q| < 1$  gewählt. Mit  $x = \frac{2\omega}{\sqrt{1-q}}$  und  $\alpha = 2n$  folgt dann

$$J_\alpha(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-q)^k} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \binom{2k}{n+k} \delta_{n \leq k}$$

sowie für  $\alpha = 2n + 2 = 2(n+1)$

$$J_\alpha(x) = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(1-q)^k} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \binom{2k}{n+1+k} \delta_{n+1 \leq k} .$$

Die  $\delta_{a \geq b}$  sind wie in (iii) definiert.

*Beweis.*

- (i) Einfache Induktion und Verwendung des Additionstheorems für  $\cos(x \pm y)$ .  
(ii) Die schwächere Aussage

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \delta_{n,m} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}_1$$

ist aus der *Fourieranalysis* bekannt. Der Fall  $n, m = 0$  wird separat betrachtet, negative  $n, m$  werden wegen  $\sin(-x) = -\sin(x)$  zu Vorfaktoren des Integrals.

- (iii) Wir betrachten  $\alpha_{n,k,j}$  zuerst für  $k$  beliebig. Wir wenden die Identität

$$\sin(x) \cos(y) = \frac{1}{2} (\sin(x-y) + \sin(x+y))$$

auf die letzten beiden trigonometrischen Faktoren des Integrals an und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_{n,k,j} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \sin(\varphi(2n+1)) (\sin(\varphi(1-k+2j)) + \sin(\varphi(1+k-2j))) d\varphi \\ &\stackrel{(ii)}{=} \frac{1}{2} (\gamma(2n+1) \gamma(1-k+2j) \delta_{|2n+1, |1-k+2j|} \frac{\pi}{2} + \gamma(2n+1) \gamma(1+k-2j) \delta_{|2n+1, |1+k-2j|} \frac{\pi}{2}) \\ &= \frac{\pi}{4} (\gamma(1-k+2j) \delta_{2n+1, |1-k+2j|} + \gamma(1+k-2j) \delta_{2n+1, |1+k-2j|}) , \end{aligned}$$

da  $\gamma(2n+1) = 1$  für alle  $n \geq 0$ . Sei nun  $k$  ungerade, d.h.  $k = 2l + 1$ , so gilt

$$\begin{aligned} \delta_{2n+1, |1-k+2j|} &= \delta_{2n+1, 2|j-l|} = 0 \text{ sowie} \\ \delta_{2n+1, |1+k-2j|} &= \delta_{2n+1, 2|1+l-j|} = 0 . \end{aligned}$$

Damit verschwinden offensichtlich die  $\alpha_{n,k,j}$  für ungerades  $k$ . Wir betrachten also nur Terme

$$\alpha_{n,2k,j} = \frac{\pi}{4} (\gamma(1-2k+2j)\delta_{2n+1,|1-2k+2j|} + \gamma(1+2k-2j)\delta_{2n+1,|1+2k-2j|}) .$$

Der Fall  $0 = 1 - 2k + 2j$  bzw.  $0 = 1 + 2k - 2j$  ist offensichtlich nicht möglich, also liefert die Abbildung  $\gamma$  stets nur  $-1$  oder  $+1$ .

Wir untersuchen nun diese Vorzeichen  $\gamma(1-2k+2j)$  und  $\gamma(1+2k-2j)$  in Abhängigkeit von  $n$  und  $k$ :

$$\begin{aligned} 1 - 2k + 2j > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > k - j \underset{k,j \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} k - j \leq 0 \\ &\Leftrightarrow j \geq k, \text{ d.h. } j \in \{k, \dots, 2k\} \end{aligned}$$

(der andere Fall  $1 - 2k + 2j < 0$  tritt dann bei  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  auf)

$$\begin{aligned} 1 + 2k - 2j > 0 &\Leftrightarrow \frac{1}{2} > j - k \underset{k,j \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} j - k \leq 0 \\ &\Leftrightarrow j \leq k, \text{ d.h. } j \in \{0, \dots, k\} \end{aligned}$$

(anderer Fall hier bei  $j \in \{k+1, \dots, 2k\}$ )

Anhand dieser Ergebnisse wird die Summe nun aufgesplittet:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \alpha_{n,2k,j} &= \frac{\pi}{4} \left[ \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{j} \underbrace{\gamma(1-2k+2j)}_{=-1} \delta_{2n+1,|1-2k+2j|} + \right. \\ &\quad \sum_{j=k}^{2k} \binom{2k}{j} \underbrace{\gamma(1-2k+2j)}_{=+1} \delta_{2n+1,|1-2k+2j|} + \\ &\quad \sum_{j=0}^k \binom{2k}{j} \underbrace{\gamma(1+2k-2j)}_{=+1} \delta_{2n+1,|1+2k-2j|} + \\ &\quad \left. \sum_{j=k+1}^{2k} \binom{2k}{j} \underbrace{\gamma(1+2k-2j)}_{=-1} \delta_{2n+1,|1+2k-2j|} \right] \end{aligned}$$

Vereinfachen der Beträge liefert letztendlich den Ausdruck

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \alpha_{n,2k,j} &= \frac{\pi}{4} \left[ - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k}{j} \delta_{j,k-n-1} + \sum_{j=k}^{2k} \binom{2k}{j} \delta_{j,n+k} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{j=0}^k \binom{2k}{j} \delta_{j,k-n} - \sum_{j=k+1}^{2k} \binom{2k}{j} \delta_{j,n+k+1} \right] . \end{aligned} \quad (*)$$

Jede der vier Summen gibt maximal einen Beitrag, wobei der Faktor  $\delta$  darüber bestimmt, ob dieser geliefert wird. Wir untersuchen also die Bedingungen an  $n$  und  $k$ , unter denen ein Beitrag existiert:

(1)  $j = k - n - 1$  und  $0 \leq j \leq k - 1$ , also

$$0 \leq k - n - 1 \leq k - 1 \Leftrightarrow n \leq k - 1 \wedge n \geq 0$$

(2)  $j = k + n$  und  $k \leq j \leq 2k$ , also

$$k \leq k + n \leq 2k \iff n \leq k \wedge n \geq 0$$

(3)  $j = k - n$  und  $0 \leq j \leq k$ , also

$$0 \leq k - n \leq k \iff n \leq k \wedge n \geq 0$$

(4)  $j = k + n + 1$  und  $k + 1 \leq j \leq 2k$ , also

$$k + 1 \leq k + n + 1 \leq 2k \iff n + 1 \leq k \wedge n \geq 0$$

Die Bedingung  $n \geq 0$  ist trivialerweise erfüllt. Wir verwenden nun die Identität  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$  (für  $0 \leq k \leq n$ ) des Binomialkoeffizienten, um den Ausdruck (\*) nochmals zu vereinfachen:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \alpha_{n,2k,j} &= \frac{\pi}{4} \left[ \binom{2k}{k+n} \delta_{k \geq n} - \binom{2k}{k-n-1} \delta_{k \geq n+1} + \right. \\ &\quad \left. \binom{2k}{k-n} \delta_{k \geq n} - \binom{2k}{k+n+1} \delta_{k \geq n+1} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[ \binom{2k}{k+n} \delta_{k \geq n} - \binom{2k}{k+n+1} \delta_{k \geq n+1} \right] \end{aligned}$$

Dies zeigt die Behauptung von (iii).

(iv) Zunächst ist zu beachten, dass  $\Gamma(k+1) = k!$  für  $k \in \mathbb{N}_0$  gilt. Es folgt

$$\begin{aligned} J_\alpha(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \cdot \Gamma(k+2n+1)} \left[ \frac{2\omega}{2\sqrt{1-q}} \right]^{2k+2n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+2n)!} \frac{\omega^{2(k+n)}}{(1-q)^{k+n}} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!(k+n)!} \frac{\omega^{2k}}{(1-q)^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^n (-1)^k}{(1-q)^k} \frac{\omega^{2k}}{(2k)!} \binom{2k}{k+n} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k}}{(1-q)^k (2k)!} \binom{2k}{k+n} \delta_{k \geq n} \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. Die zweite Formel ergibt sich durch den Übergang  $n \mapsto n+1$ . □

*Beweis zu Satz 5.12.* Für den Beweis verwenden wir die Darstellung von  $\nu_q(dx)$  aus Lemma 5.6 (iii). Analog zum Beweis von Lemma 5.10 rechnen wir:

$$\begin{aligned} \hat{\nu}_q(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_q(t) \exp(-i\omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t) \nu_q(dt) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(n+1)}{2}} \int_0^\pi \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) \exp(-i\omega t) d\varphi \end{aligned}$$



Gleichmäßige Konvergenz erlaubt die Vertauschung von Reihe und Integral in der obigen Rechnung.

Es war  $t = \frac{2 \cos(\varphi)}{\sqrt{1-q}}$ . Wir entwickeln als nächstes  $\exp(-i\omega t)$  in eine Potenzreihe. Mit der Reihendarstellung  $\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$  folgt

$$\begin{aligned} \exp(-i\omega t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} t^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k!} \frac{2^k \cos^k(\varphi)}{\sqrt{1-q}^k} \\ &\stackrel{5.13(i)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega 2)^k}{k! \sqrt{1-q}^k} \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos((k-2j)\varphi) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k! \sqrt{1-q}^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \cos((k-2j)\varphi). \end{aligned}$$

Nun wenden wir diesen Ausdruck auf den Integral-Term aus  $\hat{\nu}_q(\omega)$  an:

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) \exp(-i\omega t) d\varphi \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k! \sqrt{1-q}^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \int_0^\pi \sin(\varphi(2n+1)) \sin(\varphi) \cos(\varphi(k-2j)) d\varphi \\ &\stackrel{5.13(iii)}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-i\omega)^k}{k! \sqrt{1-q}^k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \alpha_{n,k,j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k}}{(2k)! (1-q)^k} \sum_{j=0}^{2k} \binom{2k}{j} \alpha_{n,2k,j} \quad (\text{kein Beitrag für } k \text{ ungerade}) \\ &\stackrel{5.13(iii)}{=} \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k}}{(2k)! (1-q)^k} \left[ \delta_{k \geq n} \binom{2k}{k+n} - \delta_{k \geq n+1} \binom{2k}{k+n+1} \right] \end{aligned}$$

Wieder folgt unter Anwendung der gleichmäßigen Konvergenz die obige Vertauschung von Reihen- und Integralbildung. Diesen Term setzen wir nun in  $\hat{\nu}_q(\omega)$  ein und vereinfachen weiter:

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi} \hat{\nu}_q(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[ (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k}}{(1-q)^k (2k)!} \binom{2k}{k+n} \delta_{n \leq k} - \right. \\ &\quad \left. (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega^{2k}}{(1-q)^k (2k)!} \binom{2k}{k+n+1} \delta_{n+1 \leq k} \right] \\ &\stackrel{5.13(iv)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[ J_{2n} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q}} \right) + J_{2n+2} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q}} \right) \right] \end{aligned}$$

Dies war die gesuchte Darstellung durch Besselfunktionen. □

**Beispiel 5.14** ( $q$ -Spektralmaß für  $q = 0$  (freie Variante))

Für dieses Beispiel verwenden wir die ursprüngliche Definition des  $q$ -Spektralmaßes als unendliches Produkt aus Definition 5.4. Wegen  $q = 0$  erhalten wir  $x = 2 \cos(\varphi)$  (siehe erneut 5.4 für die Beziehung zwischen  $x$  und  $\varphi$ ) und insbesondere verschwindet das unendliche Produkt, d.h. der Ausdruck ist konstant 1. Mit  $\varphi = \arccos(x/2)$  folgt nun

$$\sin(\varphi) = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{4 - x^2}.$$

Dies liefert uns auf  $[-2, 2]$  das Maß

$$\nu_0(dx) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{4 - x^2} dx,$$

welches genau das Wigner'sche Halbkreisgesetz (*Wigner semicircle law*) mit Radius  $R = 2$  ist.

Im letzten Beispiel haben wir also gezeigt, dass das  $q$ -Spektralmaß für  $q = 0$  mit der prominenten Grenzverteilung aus der freien Wahrscheinlichkeitstheorie übereinstimmt. Diese Übereinstimmung gilt hier sogar als Konvergenz der Dichten und nicht nur im Sinne der schwachen Konvergenz von Maßen. Als nächstes wollen wir den Randfall  $q = 1$  untersuchen und werden feststellen, dass  $\nu_q(dx)$  eine zwischen klassischer und freier Wahrscheinlichkeitstheorie interpolierende *Eigenschaft* (zumindestens im Sinne der Grenzverteilung) besitzt.

**Satz 5.15** ( $q$ -Spektralmaß für  $q \rightarrow 1$  (klassischer Fall))

Wir wollen zeigen, dass eine zu Beispiel 5.14 analoge Eigenschaft ebenfalls für  $q \rightarrow 1$  gilt. Wir erwarten also den folgenden Grenzwert:

$$\nu_q(dx) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx$$

Genauer geht hier die  $q$ -deformierte Spektraldichte in die Dichtefunktion der *Standardnormalverteilung* über, d.h. im Sinne der *punktweisen Konvergenz* der Dichtefunktionen. Daraus folgt dann direkt die schwache Konvergenz der zugehörigen Maße. Wir befinden uns demnach in der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie.

Um den Grenzübergang zu zeigen, verwenden wir die Darstellung von  $\nu_q(dx)$  als Thetafunktion.

*Beweis.* Die benötigte Darstellung hatten wir in Lemma 5.8 gezeigt. Mit dieser ist

$$\frac{\sqrt{1-q}}{2\pi} q^{-\frac{1}{8}} \theta_1\left(\frac{\varphi}{\pi}, \sqrt{q}\right) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

zu zeigen. Da  $q^{-\frac{1}{8}} \rightarrow 1$  geht, reicht es

$$-\sqrt{1-q} \cdot \vartheta_{11}\left(\frac{\varphi}{\pi}, \frac{1}{2\pi i} \log(q)\right) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \quad (5.14)$$

zu zeigen.

Sei dazu  $q \in (0, 1)$ , so gilt  $\log(q) \in (-\infty, 0)$ . Für  $q \rightarrow 1$  gilt  $\log(q) \nearrow 0$ . Wir setzen

$$\epsilon := \sqrt{-\log(q)}, \quad (5.15)$$

d.h.  $-\epsilon^2 = \log(q)$ . Mit dieser Definition folgt aus  $q \rightarrow 1$  der Limes  $\epsilon \searrow 0$ , den wir im Folgenden anwenden. Wir betrachten zuerst die Standard-Thetafunktion

$$\vartheta(z, \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n z).$$

Die Idee des Beweises ist, die Terme  $f_1(n) := \pi i n^2 \tau$  und  $f_2(n) := 2\pi i n z$  geeignet umzuformen bzw. zu approximieren. Dies liefert unter anderem (durch Abspalten) den gesuchten Faktor  $\exp(-\frac{x^2}{2})$ . Der verbleibende Teil der Thetafunktion wird dann im letzten Schritt durch die Poisson-Summenformel aus Bemerkung 5.11 transformiert. Dies liefert zusammen mit dem Term  $\sqrt{1-q}$  (auf der linken Seite von (5.14)) den Faktor  $\sqrt{2\pi}$ .

An dieser Stelle wollen wir kurz wiederholen, in welcher Relation die zahlreichen Variablen  $\varphi, z, q, x$  und  $\tau$  stehen:

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{2}\sqrt{1-q}, \quad z = \frac{\varphi}{\pi}, \quad \tau = \frac{1}{2\pi i} \log(q)$$

Das  $x$  stammt dabei aus dem Intervall  $I_q := [-\frac{2}{\sqrt{1-q}}, +\frac{2}{\sqrt{1-q}}]$ . Ist  $x \in \mathbb{R}$  fest gewählt, so nehmen wir  $\epsilon > 0$  als hinreichend klein an, derart dass  $x \in I_q$  gilt. Da  $I_q$  beim Grenzprozess  $q \rightarrow 1$  in ganz  $\mathbb{R}$  übergeht, ist diese Wahl möglich.

Da  $\varphi = \arccos(\frac{x}{2}\sqrt{1-q})$  ist, betrachten wir die Reihenentwicklung

$$\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{t^{2k+1}}{2k+1}.$$

Die Taylorentwicklung im Punkt  $t = 0$  hat also die Form

$$\arccos(t) = \frac{\pi}{2} - t + O(t^3),$$

was uns die (erste) Approximation von

$$\varphi = \varphi_q = \arccos(\frac{x}{2}\sqrt{1-q}) = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1-q} + O((\frac{x}{2}\sqrt{1-q})^3)$$

liefert. Das  $x$  ist, wie erwähnt, fest, also gilt  $\frac{x}{2}\sqrt{1-q} \rightarrow 0$  für  $q \rightarrow 0$  (damit begründet sich auch die Wahl des Entwicklungspunktes). Wir betrachten  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $q$ , damit ist im  $O$ -Term der Faktor  $\frac{x^3}{8}$  eine Konstante (siehe [Bru70] für eine Einführung in die *Landau-Notation*) und wir erhalten

$$\varphi_q = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1-q} + O((\sqrt{1-q})^3).$$

Die Konstante des  $O$ -Terms darf hierbei von  $x$  abhängen und wird dies zwangsläufig auch. Mit der Wahl aus (5.15) resultiert  $q = \exp(-\epsilon^2)$ . Folglich betrachten wir die Taylorentwicklung (wieder in  $t = 0$ ) von

$$\sqrt{1 - \exp(-t^2)} = t + O(t^3).$$

Damit gilt  $(\sqrt{1-q})^3 = \epsilon^3 + O(\epsilon^5)$  und demnach vereinfacht sich der  $O$ -Term von  $\varphi_q$  zu  $O(\epsilon^3)$  (da wir  $\epsilon \rightarrow 0$  betrachten).

Damit erhalten wir eine Approximation von  $\varphi$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned} \varphi = \varphi_\epsilon &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{1-q} + O((\frac{x}{2}\sqrt{1-q})^3) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}(\epsilon + O(\epsilon^3)) + O(\epsilon^3 + O(\epsilon^5)) = \frac{1}{2}(\pi - x\epsilon) + O(\epsilon^3) \end{aligned} \quad (5.16)$$

Wir setzen diese Approximation nun für  $f_2(n)$  ein und vereinfachen  $f_1(n)$  in Abhängigkeit von  $\epsilon$ . Da  $n$  der Summationsindex der Reihe ist, gilt es zu vermeiden, das  $n$  als Konstante im  $O$ -Term *verschwinden* zu lassen:

$$\begin{aligned} f_1(n) &= \pi i n^2 \tau = \frac{\pi i n^2 \log(q)}{2\pi i} = \frac{n^2}{2} \log(q) \\ &= \frac{n^2}{2}(-\epsilon^2) = -\epsilon^2 \frac{n^2}{2} \\ f_2(n) &= 2\pi i n z = 2\pi i n \frac{\varphi}{\pi} = 2in \left( \frac{1}{2}(\pi - x\epsilon) + O(\epsilon^3) \right) \\ &= \pi i n - xin\epsilon + nO(\epsilon^3) \end{aligned}$$

Wir setzen dies nun in die Thetafunktion ein und beachten dabei, dass wir mit der modifizierten Variante

$$\vartheta_{11}(z, \tau) = \exp\left(\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right) \vartheta\left(z + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}, \tau\right)$$

arbeiten. Den exponentiellen Vorfaktor blenden wir an dieser Stelle zuerst einmal aus:

$$\begin{aligned} \vartheta\left(z + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}, \tau\right) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(\pi i n^2 \tau + 2\pi i n \left(z + \frac{\tau}{2} + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(f_1(n) + 2\pi i n z + \pi i n \tau + \pi i n\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\epsilon^2 \frac{n^2}{2} + f_2(n) + \pi i n \frac{\log(q)}{2\pi i} + \pi i n\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\epsilon^2 \frac{n^2}{2} + \pi i n - x i n \epsilon + \frac{n}{2} \log(q) + \pi i n + n O(\epsilon^3)\right) \\ &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\epsilon^2 \frac{n^2}{2} - \epsilon^2 \frac{n}{2} - x i n \epsilon + n O(\epsilon^3)\right) \end{aligned}$$

Wir definieren  $z(n) := -\epsilon^2 \frac{n^2}{2} - \epsilon^2 \frac{n}{2} - x i n \epsilon + n O(\epsilon^3)$ , dann gilt

$$\vartheta_{11}(z, \tau) = C_0 \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp(z(n)) \text{ mit } C_0 := \exp\left(\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i \left(z + \frac{1}{2}\right)\right).$$

Eine quadratische Ergänzung von  $z(n)$  liefert den folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned} z(n) &= -\epsilon^2 \frac{n^2}{2} - \epsilon^2 \frac{n}{2} - x i n \epsilon + n O(\epsilon^3) \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2} \left(n^2 + 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)\right) \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2} \left(n^2 + 2n \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)^2 - \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)^2\right) \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2} \left(n + \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)\right)^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)^2 \end{aligned}$$

Nach Einsetzen gilt nun

$$\vartheta_{11}(z, \tau) = C_0 \exp\left(\frac{\epsilon^2}{2} C_1^2\right) \cdot \sum_{n \in \mathbb{Z}} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2} (n + C_1)^2\right), \quad (5.17)$$

wobei der von  $\epsilon$  abhängige Term  $C_1$  durch

$$C_1 := \frac{1}{2} + \frac{i x}{\epsilon} + O(\epsilon)$$

gegeben ist. Wir beachten, dass dieses  $C_1$  keine implizite Abhängigkeit von  $n$  besitzt.

Zuerst betrachten wir den zweiten Vorfaktor für  $\epsilon \rightarrow 0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right)^2 &= \frac{\epsilon^2}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{x^2 i^2}{\epsilon^2} + 2 \frac{1}{2} \frac{x i}{\epsilon} + O(\epsilon)\right) \\ &= \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{\epsilon^2 x^2}{2\epsilon^2} + \frac{\epsilon^2 x i}{2\epsilon} + O(\epsilon^3) \\ &= \frac{\epsilon^2}{8} - \frac{x^2}{2} + \frac{\epsilon x i}{2} + O(\epsilon^3) \longrightarrow -\frac{x^2}{2} \end{aligned} \quad (*)$$

Als nächstes untersuchen wir den ersten Vorfaktor  $C_0$ :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi i \tau}{4} + \pi i \left( z + \frac{1}{2} \right) &= \frac{\pi i \log(q)}{4} + \pi i \left( z + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}(-\epsilon^2) + \pi i \left( \frac{\varphi}{\pi} + \frac{1}{2} \right) \\
&= -\frac{\epsilon^2}{8} + \pi i \left( \frac{1}{2\pi}(\pi - x\epsilon) + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right) \\
&= -\frac{\epsilon^2}{8} + \pi i \left( \frac{1}{2} - \frac{x\epsilon}{2\pi} + \frac{1}{2} + O(\epsilon) \right) \\
&= -\frac{\epsilon^2}{8} + \pi i + \frac{ix}{2}\epsilon + O(\epsilon) \longrightarrow \pi i
\end{aligned} \tag{**}$$

Der erste Vorfaktor liefert also  $\exp(\pi i) = -1$ , der zweite Vorfaktor den Term  $\exp(-\frac{x^2}{2})$ . Es bleibt die Reihe über die Exponentialterme zu betrachten. Dafür setzen wir

$$f(t) := \exp\left(-\epsilon^2 \frac{(t + C_1)^2}{2}\right) \quad \text{ sowie } \quad g(t) := \exp\left(-\epsilon^2 \frac{t^2}{2}\right), \tag{5.18}$$

dann gilt nach Bemerkung 5.11 der Zusammenhang

$$\begin{aligned}
f(t) &= g(t + C_1) \\
\hat{g}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon^2}} \exp\left(\frac{1}{\epsilon^2} \frac{\omega^2}{2}\right) = \frac{1}{\epsilon} \exp\left(\frac{\omega^2}{2\epsilon^2}\right)
\end{aligned}$$

und folglich die Aussage

$$\hat{f}(\omega) = \exp\left(i \left( \frac{1}{2} + \frac{ix}{\epsilon} + O(\epsilon) \right) \omega\right) \frac{1}{\epsilon} \exp\left(\frac{\omega^2}{2\epsilon^2}\right).$$

Hier wenden wir nun die Poisson-Summenformel (ebenfalls aus Bemerkung 5.11) an:

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) &= \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(2\pi k) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp\left(i 2\pi k \left( \frac{1}{2} + \frac{xi}{\epsilon} + O(\epsilon) \right)\right) \exp\left(-\frac{1}{\epsilon^2} \frac{(2\pi k)^2}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \exp\left(-\frac{2\pi k x}{\epsilon} + k O(\epsilon)\right) \exp\left(-\frac{2\pi^2 k^2}{\epsilon^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2\pi}}{\epsilon} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \exp\left(-2\pi k x \frac{1}{\epsilon} - 2\pi^2 k^2 \frac{1}{\epsilon^2} + k O(\epsilon)\right)
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Für  $k = 0$  liefert die obige Summe den Beitrag 1. Sei nun  $k \neq 0$  und es laufe  $\epsilon \rightarrow 0$  (offensichtlich verschwindet dann der Term  $kO(\epsilon)$ ), dann gilt

$$-2\pi k x \frac{1}{\epsilon} - \underbrace{2\pi^2 k^2}_{>0} \frac{1}{\epsilon^2} \longrightarrow -\infty,$$

da der  $\frac{1}{\epsilon^2}$ -Term schneller als  $\frac{1}{\epsilon}$  wächst. Die Vorzeichen von  $k$  und  $x$  sind also an dieser Stelle nicht mehr relevant. Für  $k \neq 0$  geben die Summanden folglich keinen Beitrag (da  $\lim_{t \rightarrow \infty} \exp(-t) = 0$ ).

An dieser Stelle verwenden wir den *Satz von der majorisierten Konvergenz* mit dem (beidseitigen) Zählmaß  $\mu_{\mathbb{Z}} = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \delta_z$ . Sei  $(\epsilon_n)_n$  eine zu  $\epsilon$  gehörige Folge ( $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ ) und sei die Funktionenfolge  $\{h_n(k)\}_n$  durch

$$h_n(k) := (-1)^k \exp \left( -2\pi k x \frac{1}{\epsilon_n} - 2\pi^2 k^2 \frac{1}{\epsilon_n^2} + k\varphi(\epsilon_n) \right)$$

(mit  $\varphi(\epsilon) = O(\epsilon)$ , d.h.  $|\varphi(\epsilon)| \leq C'\epsilon$  für  $\epsilon$  klein mit einer Konstante  $C'$ , die nach Konstruktion *nicht* von  $k$  abhängt) definiert, so existiert ein  $n_0$  mit

$$|h_n(k)| \leq \exp \left( -\pi^2 k^2 \frac{1}{\epsilon_n^2} \right) \leq \exp(-\pi k^2) =: \bar{h}(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \quad \forall n \geq n_0 .$$

Das  $\bar{h}$  ist unsere *integrierbare Majorante* (die Konvergenz von  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi k^2)$  folgt sofort unter Anwendung des Quotientenkriteriums und der Symmetrie der Reihe in  $k$ ), also erhalten wir im Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_n(k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(k) = 1 .$$

Erneut betrachten wir den Limes  $\epsilon \rightarrow 0$ , dann folgt:

$$\begin{aligned} & \epsilon \cdot C_0 \exp \left( \frac{\epsilon^2}{2} C_1^2 \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \stackrel{(5.19)}{=} \\ & C_0 \exp \left( \frac{\epsilon^2}{2} C_1^2 \right) \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \exp \left( -2\pi k x \frac{1}{\epsilon} - 2\pi^2 k^2 \frac{1}{\epsilon^2} + kO(\epsilon) \right) \\ & \xrightarrow{\text{siehe (*) und (**)}} \exp(\pi i) \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) \sqrt{2\pi} = -\sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) \quad (***) \end{aligned}$$

Kombiniert man anschließend alle Resultate, so erhalten wir für Gleichung (5.14):

$$\begin{aligned} & -\sqrt{1-q} \cdot \vartheta_{11}(z, \tau) \\ & \stackrel{(5.16)}{=} -(\epsilon + O(\epsilon^3)) \cdot \vartheta_{11}(z, \tau) \\ & \stackrel{(5.17)}{=} \stackrel{(5.18)}{=} -(\epsilon + O(\epsilon^3)) \cdot C_0 \exp \left( \frac{\epsilon^2}{2} C_1^2 \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) \xrightarrow{\text{siehe (***)}} \sqrt{2\pi} \exp \left( -\frac{x^2}{2} \right) \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung des Lemmas. □

**Lemma 5.16** ( $q$ -Spektralmaß mit  $q \rightarrow -1$  (antisymmetrischer Fall))

Es gilt

$$\lim_{q \rightarrow -1} \nu_q(dx) = \frac{1}{2}(\delta_{-1}(dx) + \delta_{+1}(dx))$$

im Sinne der schwachen Konvergenz von Maßen.

Betrachtet wir die kumulative Verteilungsfunktion  $F$  für diesen Fall, so erhalten wir die Abbildung

$$F(x) = \int_{-\infty}^x \nu_q(dt) = \begin{cases} 0 & : x < -1 \\ \frac{1}{2} & : -1 \leq x < 1 \\ 1 & : x \geq 1 , \end{cases}$$

welche bis auf Skalarierung und Verschiebung die *Fermifunktion* (bei  $T = 0$ , also absoluter Temperaturnullpunkt) ist. Diese Funktion findet Einsatz in der *Fermi-Dirac-Statistik*, wo sie die Energiekonfiguration eines Systems identischer Fermionen beschreibt. Dies deckt sich mit der Eigenschaft des  $q$ -Fockraums für den Randfall  $q = -1$ , die wir in Bemerkung 3.22 betrachtet hatten.

*Beweis.* Für die schwache Konvergenz reicht es die Konvergenz der Fouriertransformierten der Dichten zu untersuchen. Aus Satz 5.12 kennen wir bereits eine kompakte Darstellung der FT der  $q$ -Spektraldichte. Setzen wir  $f(x) := \frac{1}{2}(\delta_{-1}(x) + \delta_{+1}(x))$ , so gilt

$$\begin{aligned}\hat{f}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}(\delta_{-1}(t) + \delta_{+1}(t)) \exp(-i\omega t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{2}(\exp(+i\omega) + \exp(-i\omega)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(\omega).\end{aligned}$$

Es reicht also den Grenzübergang

$$\hat{\nu}_q(\omega) \xrightarrow{q \rightarrow -1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cos(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

nachzuweisen. Formales Einsetzen von  $q = -1$  liefert uns den Ausdruck

$$\sqrt{2\pi} \hat{\nu}_{-1}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (J_{2n}(\sqrt{2}\omega) + J_{2(n+1)}(\sqrt{2}\omega)).$$

In diesem substituieren wir als erstes den Parameter  $y := \sqrt{2}\omega$ . Nach [AS64, Formel 9.1.42] gilt die folgende Darstellung:

$$\cos(z \sin(\theta)) = J_0(z) + 2 \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}(z) \cos(2k\theta) \quad (z \in \mathbb{C}) \quad (*)$$

Wie im Beweis von Satz 5.15 verwenden wir die *majorisierte Konvergenz*. Wir betrachten den Limes  $q \rightarrow -1$ , können also ohne Einschränkung  $q \in (-1, 0)$  annehmen. Sei  $\omega \in \mathbb{R}$  fest und  $(q_k)_k$  eine Folge mit  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = -1$ . Dann definieren wir

$$h_k(n) := q_k^{\frac{n(n+1)}{2}} \left( J_{2n} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q_k}} \right) + J_{2(n+1)} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q_k}} \right) \right).$$

Wir verwenden die Abschätzung

$$|J_\nu(z)| \leq \frac{|\frac{z}{2}|^\nu \exp(|\Im(z)|)}{\Gamma(\nu+1)} \quad (\nu \geq -\frac{1}{2})$$

aus [AS64, 9.1.62]. Wegen  $0 < |q_k| < 1$  sowie  $1 < |1 - q_k| < 2$  folgt

$$\begin{aligned}|h_k(n)| &\leq |q_k|^{\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \left( \frac{|\frac{2\omega}{2\sqrt{1-q_k}}|^{2n} \exp(0)}{(2n)!} + \frac{|\frac{2\omega}{2\sqrt{1-q_k}}|^{2(n+1)} \exp(0)}{(2(n+1))!} \right) \\ &\leq \frac{\omega^{2n}}{|1-q_k|^{n(2n)!}} + \frac{\omega^{2(n+1)}}{|1-q_k|^{n+1}(2(n+1))!} \\ &\leq \frac{\omega^{2n}}{(2n)!} + \frac{\omega^{2(n+1)}}{(2(n+1))!} =: \bar{h}(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Die Reihe über die rechte Seite  $\bar{h}(n)$  ist aber gerade  $2 \cosh(\omega) - 1$ , damit ist  $\bar{h}$  die gesuchte integrierbare Majorante. Es folgt nun

$$\begin{aligned}
\lim_{q \rightarrow -1} \sqrt{2\pi} \hat{\nu}_q(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{q \rightarrow -1} q_k^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[ J_{2n} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q_k}} \right) + J_{2(n+1)} \left( \frac{2\omega}{\sqrt{1-q_k}} \right) \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} J_{2n}(y) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} J_{2n}(y) \\
&= J_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(y) \left( (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} + (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \right) \\
&= J_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(y) \left[ \exp \left( in \frac{\pi}{2} \right) + \exp \left( -in \frac{\pi}{2} \right) \right] \\
&= J_0(y) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(y) \cos \left( 2n \frac{\pi}{4} \right) \stackrel{(*)}{=} \cos \left( y \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \right) = \cos \left( y \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \cos(\omega)
\end{aligned}$$

und somit die Behauptung. Die Umordnungen der Reihen ist wegen absoluter Konvergenz erlaubt.  $\square$

### Bemerkung 5.17

Mit Satz 5.15 und Lemma 5.16 kann man nun die Definition des  $q$ -Spektralmaßes aus Definition 5.4 auf die Randwerte  $q = \pm 1$  durch

$$\nu_1(dx) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx, \quad \nu_{-1}(dx) := \frac{1}{2} (\delta_{-1}(dx) + \delta_{+1}(dx))$$

erweitern.

Wir haben den Begriff *Spektralmaß* bereits in Verbindung mit einer Bezeichnung verwendet, allerdings noch nicht erklärt, was er im Allgemeinen explizit bedeutet. Dies soll nun nachgeholt werden.

### Definition 5.18 (Spektralmaß (PVM))

Sei  $(\Omega, \mathcal{A})$  ein Meßraum und  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum mit innerem Produkt  $\langle \cdot | \cdot \rangle$ . Betrachte eine Abbildung

$$\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \{T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} : T \text{ selbstadjungierte Projektion}\},$$

derart dass  $\pi(\Omega) = \text{id}_{\mathcal{H}}$  gilt und für alle  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  die Abbildung

$$A \longmapsto \langle \pi(A)\xi | \eta \rangle$$

ein komplexes Maß auf  $\mathcal{A}$  ist. Projektionen sind in diesem Kontext immer Orthogonalprojektionen, d.h. für  $A \in \mathcal{A}$  ist die Abbildung  $\pi(A)$  idempotent und es gilt

$$\langle \pi(A)x | \pi(A)y \rangle = \langle x | y \rangle \quad (x, y \in \mathcal{H}).$$

Für  $A \cap B = \emptyset$  folgt dann insbesondere, dass  $\pi(A)$  und  $\pi(B)$  orthogonale Projektionen sind, d.h. die jeweiligen Bilder sind orthogonale Unterräume aus  $\mathcal{H}$ .

Eine derartige Abbildung  $\pi$  wird dann *Spektralmaß* oder auch *PVM* (*projection-valued measure*) genannt. Wir werden im Folgenden die englische Abkürzung verwenden, da sie wesentlich aussagekräftiger ist.



**Bemerkung 5.19** (PVM eines normalen (beschränkten) Operators)

Sei  $\mathcal{H}$  komplexer Hilbertraum und  $N$  ein normaler Operator auf  $\mathcal{H}$ , d.h. ein stetiger linearer Operator, der mit  $N^*$ , dem hermitisch adjungierten Operator, vertauscht. Unter diesen Voraussetzungen existiert ein PVM  $T$  auf  $\mathbb{C}$ , derart, dass für jedes Polynome  $p$  in zwei (kommutierenden) Variablen die Beziehung

$$p(N, N^*) = \int_{\mathbb{C}} p(z, \bar{z}) dT(z)$$

gilt. Insbesondere gilt dann mit der Wahl  $p(t) := t^k$  ( $k \in \mathbb{N}_1$ ) die Variante

$$N^k = \int_{\mathbb{C}} z^k dT(z) .$$

Uns wird diese schwächere Formulierung reichen, da wir letztendlich nur selbstadjungierte Operatoren betrachten. Das obige Integral ist so zu verstehen, dass für alle  $\xi, \eta \in \mathcal{H}$  die Relation

$$\langle N^k \xi | \eta \rangle = \int_{\mathbb{C}} z^k d\langle T(z) \xi | \eta \rangle \quad (5.20)$$

gilt, wobei  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  wieder das innere Produkt von  $\mathcal{H}$  bezeichnet. Nach Definition 5.18 ist  $\langle T(\cdot) \xi | \eta \rangle$  ein von  $\xi$  und  $\eta$  abhängiges komplexwertiges Maß. Eine weitere Aussage der Spektraltheorie ist, dass die derartig gewonnenen Maße nur auf dem Spektrum  $\sigma(N)$  nicht-verschwindend sind. Für selbstadjungierte Operatoren erhalten wir also insbesondere Maße auf  $\mathbb{R}$ .

Für unsere Anwendung werden wir  $\mathcal{H}$  als den  $q$ -Fockraum setzen und  $\xi := \eta := \Omega$  (mit  $\Omega$  dem bekannten Vakuumvektor) betrachten. Der bekannte selbstadjungierte Positionoperator  $w(f)$  nimmt die Rolle des normalen Operators  $N$  ein.

**Definition 5.20** (Verteilung einer verallgemeinerten Zufallsvariable)

In diesem Kontext ist eine *verallgemeinerte* Zufallsvariable einfach ein selbstadjungierter Operator. Genauer betrachtet man  $\mathcal{A}$  eine endliche von-Neumann Algebra (siehe [KR97b, Definition 6.3.1]) mit  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$  einem treuen normalen Spurzustand. Eine Zufallsvariable ist in diesem Kontext ein beschränkter Operator  $T \in \mathcal{A}$ , der zusätzlich selbstadjungiert ist. Das Tupel  $(\mathcal{A}, \varphi)$  übernimmt dann die Rolle des *verallgemeinerten* Wahrscheinlichkeitsraums.

Sei nun  $\sigma(T)$  das Spektrum dieses Operators, so definieren wir die *Verteilung* von  $T$  als das Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu$  auf  $\sigma(T)$ , welches durch

$$\varphi(T^k) = \int_{\sigma(T)} z^k d\mu(z) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

bestimmt wird. Wegen  $T$  selbstadjungiert wird hier insbesondere ein reelles Spektrum betrachtet. Diese Notation stammt aus [BKS97, Abschnitt 3] und stellt dort die Grundlage für die Betrachtung  $q$ -deformierter Prozesse dar.

Darüber hinaus existiert die Verteilung als Spezialfall des PVM immer. Das obige  $T$  erfüllt offensichtlich die Eigenschaften des Operators aus Bemerkung 5.19, also erhalten wir das PVM  $T_0$  mit den Bedingungen aus der Bemerkung. Wir wählen  $\xi$  den zum Zustand  $\varphi$  gehörigen Zustandsvektor (existiert nach *GNS-Konstruktion*, siehe Theorem 4.5.2 sowie die Bemerkung vor Proposition 4.5.3 in [KR97a]), dann gilt

$$\varphi(T^k) = \langle T^k \xi | \xi \rangle \stackrel{(5.20)}{=} \int_{\mathbb{C}} z^k d\langle T_0(z) \xi | \xi \rangle = \int_{\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}} z^k d\langle T_0(z) \xi | \xi \rangle . \quad (5.21)$$

Die gesuchte Verteilung  $\mu$  ist also durch  $\langle T_0(\cdot)\xi|\xi\rangle$  gegeben. Es gilt  $\mu(\mathbb{C}) = \langle T_0(\mathbb{C})\xi|\xi\rangle = \langle \text{id}(\xi)|\xi\rangle = \|\xi\|^2$ , also ist  $\mu$  genau dann ein W-Maß, wenn der Vektor  $\xi$  normiert ist. Diese Bedingung ist aber nach GNS-Konstruktion immer erfüllt.

**Satz 5.21** ( $q$ -Spektralmaß als Verteilung eines normierten  $w(f)$ )

Wir betrachten den Positionsoperator  $w(f)$  aus Definition 3.26 für ein normiertes  $f \in \mathcal{H}$ , also ist  $w(f)$  ein Positionsoperator auf dem  $q$ -Fockraum  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ . Das  $w(f)$  ist ein beschränkter selbstadjungierter Operator, erfüllt also die Bedingungen aus Definition 5.20. Das  $\mathcal{A}$  in 5.20 ist hier also durch  $\mathcal{A} := \text{vN}(w(f))$  gegeben, d.h. durch die von den Positionsoperatoren erzeugte von-Neumann Algebra versehen mit dem Zustand  $\varphi := \mathbb{E}$  aus Definition 3.27.

Unter diesen Bedingungen ist die Verteilung von  $w(f)$  gerade das  $q$ -deformierte Spektralmaß  $\nu_q(dx)$  aus Definition 5.4.

Für den Beweis benötigen wir zunächst einige Hilfsaussagen.

**Lemma 5.22**

Verwende die Voraussetzungen aus Satz 5.21.

- (i) Sei ein Vektor  $f \in \mathcal{H}$  mit  $\|f\| = 1$  gegeben. Setzen wir  $p_n := (a^*(f))^n \Omega = f^{\otimes n}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  (und zusätzlich  $p_{-1} := 0$ ), dann ist  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein orthogonales System in  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  und es gilt genauer  $\langle p_n, p_m \rangle_q = \delta_{nm} [n]_q!$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}_0$ .
- (ii) Wir betrachten einen beschränkten, selbstadjungierten Operator  $T$  auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  und einen Zustandsvektor  $\xi$ , der nicht notwendigerweise unser Vakuum  $\Omega$  ist. Dann ist die Verteilung  $\mu$  des Operators  $T$  bzgl. des Vektors  $\xi$  durch die Relation

$$\int_{\sigma(T)} x^n d\mu(x) = \langle T^n \xi, \xi \rangle_q \quad (5.22)$$

charakterisiert. Dieses  $\mu$  ist bereits bestimmt, wenn  $T|_{\mathcal{A}}$  mit  $\mathcal{A} := \overline{\{T^n \xi : n \in \mathbb{N}_0\}}$  und  $\langle \cdot, \cdot \rangle_q$  auf  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  bekannt ist.

*Beweis von Lemma 5.22.*

- (i) Die Aussage, dass  $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  ein orthogonales System bildet, ist klar nach Definition des  $q$ -Skalarproduktes (siehe Definition 3.7 und Satz 3.15). Weiter gilt

$$\begin{aligned} \langle p_n, p_m \rangle_q &\stackrel{f_i := f}{=} \langle f_1 \otimes \dots \otimes f_n, f_1 \otimes \dots \otimes f_m \rangle_q \\ &= \delta_{nm} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^n \langle f_j | f_{\pi(j)} \rangle = \delta_{nm} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \prod_{j=1}^n \|f\|^2 \\ &\stackrel{\|f\|=1}{=} \delta_{nm} \sum_{\pi \in S_n} q^{i(\pi)} \stackrel{\text{Satz 2.4}}{=} \delta_{nm} [n]_q!. \end{aligned}$$

- (ii) Dies ist klar, denn die Relation (5.22) verwendet auf der rechten Seite keine weiteren Informationen (vergleiche auch (5.21)).

□

*Beweis von Satz 5.21.* Der Beweis orientiert sich an [BS92, Kapitel 3] und führt die dortige Argumentation im Detail aus.

Wir konstruieren das  $q$ -Spektralmaß und identifizieren es gleichzeitig mit der Verteilung von  $w(f)$ , indem wir die Wirkung von  $w(f)$  auf spezielle Elementarvektoren untersuchen. Dies führt zu einer Gleichung, die einen rekursiven Charakter besitzt. In der Tat kann durch geeignete *Identifikation* diese Gleichung als Rekursionsgleichung für (orthogonale) Polynome verstanden werden. An dieser Stelle sind wir bereits fertig, da das orthogonalisierende Maß für diese Polynome (sogar in allgemeinerer Form) bereits berechnet wurde.

Wie in Lemma 5.22 wählen wir  $f \in \mathcal{H}$  mit  $\|f\| = 1$  und verwenden im folgenden die Bezeichnungen  $a = a(f)$ ,  $a^* = a^*(f)$  sowie  $p_n := (a^*)^n \Omega$  mit  $p_{-1} = 0$ . Aus Lemma 5.22 (i) ist bereits die Orthogonalität der  $p_n$  bekannt. Unter anderem sehen wir hier, dass die  $p_n$  dieselbe Orthogonalitätsrelation erfüllen, die schon von den  $q$ -Hermitepolynomen aus Definition 5.5 bekannt ist. Insbesondere sind also auch die Längen der  $p_n$  bzw.  $H_n^{(q)}(x)$  bzgl. der jeweiligen Normen gleich (dies wird im Verlauf wichtig sein).

Die Rekursionsgleichung der  $H_n^{(q)}(x)$  ist bekannt, es gilt nun etwas *Analoges* für die  $n$ -Teilchenvektoren  $p_n$  zu bestimmen. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Auswirkung des Positionsoperators  $w(f) = a^* + a$  auf die  $p_n$ :

$$\begin{aligned} w(f)p_n &= (a^* + a)p_n = p_{n+1} + a(f)p_n = p_{n+1} + \sum_{i=1}^n q^{i-1} \langle f|f \rangle p_{n-1} \\ &= p_{n+1} + p_{n-1} \sum_{i=1}^n q^{i-1} = p_{n+1} + p_{n-1} \frac{1 - q^n}{1 - q} = p_{n+1} + p_{n-1} [n]_q \end{aligned}$$

Die  $p_n$  genügen also für  $n \in \mathbb{N}_0$  der Rekursionsgleichung

$$p_{n+1} = w(f)p_n - [n]_q p_{n-1} \quad (p_{-1} = 0, p_0 = \Omega) \quad (*)$$

und damit bietet sich folgende Identifikation an:

- (i) Die Elementarvektoren  $p_n$  sind die orthogonalen Polynome  $P_n(x)$  bzgl. eines auf  $\mathbb{R}$  definierten Maßes  $\mu$ .
- (ii)  $\Omega$  ist die konstante Funktion 1.
- (iii)  $w(f)$  ist der Multiplikationsoperator  $f(x) \mapsto x \cdot f(x)$  auf dem zugehörigen Hilbertraum  $L^2(\mathbb{R}, \mu)$ .

Die  $P_n$  werden die  $q$ -Hermitepolynome sein und  $\mu$  das  $q$ -Spektralmaß. Formal betrachtet man

$$\mathcal{H}_1 := \langle p_n \rangle \subseteq \mathfrak{F}_q(\mathcal{H}), \quad \mathcal{H}_2 := \langle H_n^{(q)}(x) \rangle \subseteq L^2(\nu_q),$$

die von dem jeweiligen orthogonalen System erzeugten (Unter)-Hilberträume. Wir beachten, dass  $\Omega \in \mathcal{H}_1$  gilt und dieser Unterraum  $\mathcal{H}_1$  invariant unter  $w(f)$  ist. Dann existiert wegen

$$\|H_n^{(q)}(x)\|_{L^2} = \|p_n\|_q \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

ein isometrischer Isomorphismus

$$\Phi : \mathcal{H}_1 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_2 \quad \text{durch} \quad p_n \longleftrightarrow H_n^{(q)}(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

Sei wie oben in (iii) bereits beschrieben  $M : D \rightarrow L^2(\nu_q)$  der Multiplikationsoperator mit  $x$  ( $D := \{f \in L^2 : x \cdot f(x) \in L^2\}$  der kanonische Definitionsbereich). Nach Definition 5.5 gilt

$$H_{n+1}^{(q)}(x) = xH_n^{(q)}(x) - [n]_q H_{n-1}^{(q)}(x),$$

also folgt mit (\*) die Relation  $M \circ \Phi = \Phi \circ w$ .

Wir haben  $H_0^{(q)}(x) = 1$  und  $p_0 = \Omega$ , damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[w(f)^n] &= \langle \omega^n p_0, p_0 \rangle_q \stackrel{\text{Isometrie}}{=} \langle \Phi(w^n p_0) | \Phi(p_0) \rangle_{L^2} = \left\langle M^n H_0^{(q)}(x) | H_0^{(q)}(x) \right\rangle_{L^2} \\ &= \langle x^n | 1 \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} x^n d\nu_q(x) \end{aligned}$$

und unter Verwendung von Lemma 5.22 (ii) ist das dortige  $\mu$  bereits das in 5.4 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß  $\nu_q(dx)$ .  $\square$

In diesem Abschnitt wollen wir ebenfalls noch die Arbeit [ATBL10] hervorheben, in welcher gezeigt wird, dass das Maß  $\nu_q(dx)$  im Kontext der freien Wahrscheinlichkeitstheorie unendlich teilbar (also *frei unendlich teilbar*) ist. Eine  $q$ -deformierte Variante des Teilbarkeitsbegriffes wird uns im folgenden Abschnitt 6 begegnen, wenn wir die unterschiedlichen Ansätze zur Konstruktion einer  $q$ -Konvolution betrachten.

An dieser Stelle wollen wir vorerst die analytische Betrachtung wieder hinter uns lassen und diesen Abschnitt mit einer rein kombinatorischen Betrachtung der Randfälle  $q = 1$  und  $q = -1$  abschließen.

**Proposition 5.23** (Eine Bijektion auf  $\mathcal{P}_2(2n)$ )

Wir definieren für  $n \in \mathbb{N}_1$  eine Abbildung  $\Psi : \mathcal{P}_2(2n) \rightarrow \mathcal{P}_2(2n)$  durch ( $\pi \in \mathcal{P}_2(2n)$ ):

- (i) Falls  $2i \sim_\pi 2i - 1$  für alle  $1 \leq i \leq n$  gilt, dann setze  $\Psi(\pi) := \pi$ .
- (ii) Falls ein  $i$  existiert, derart dass  $2i \not\sim_\pi 2i - 1$  gilt, so wähle dieses  $i$  minimal. Setze  $\tau := \tau_{2i, 2i-1}$  als die Transposition der Elemente  $2i$  und  $2i - 1$ , und definiere damit

$$\Psi(\pi) := \{\tau(B_1), \dots, \tau(B_r)\},$$

wobei  $B_j$  die Blöcke von  $\pi$  sind. Man schreibt in Kurzform auch  $\tau\pi$ .

Das  $\tau$  vertauscht also zwei Elemente aus *verschiedenen* Blöcken.

Die Abbildung  $\Psi$  hat nun folgende Eigenschaften:

- (1)  $\Psi \circ \Psi = \text{id}_{\mathcal{P}_2(2n)}$
- (2) Es existiert nur ein einziger Fixpunkt, nämlich die Partition

$$\pi_0 := \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2n-1, 2n\}\}.$$

- (3) Falls  $\pi \neq \pi_0$ , also  $\Psi(\pi) \neq \pi$  gilt, folgt  $(-1)^{cr(\pi)} \neq (-1)^{cr(\Psi(\pi))}$ .

*Beweis.* Die Aussagen (1) und (2) sind klar, sie ergeben sich direkt aus der Definition der Abbildung. Sei für (3) ein  $\pi \in \mathcal{P}_2(2n)$  mit  $\pi \neq \pi_0$  gegeben. Wir betrachten

$$cr(\pi) = \#\{(s_1, t_1, s_2, t_2) : s_1 < t_1 < s_2 < t_2, s_1 \sim_\pi s_2, t_1 \sim_\pi t_2, s_1 \not\sim_\pi t_1, s_2 \not\sim_\pi t_2\}$$

und können diesen Ausdruck wegen der Paarpartitionseigenschaft in die Form

$$\begin{aligned} cr(\pi) &= \#\{(s_1 < t_1 < s_2 < t_2) : (s_1, s_2) \in \pi, (t_1, t_2) \in \pi\} \\ &= \#\{(s_1 < t_1 < s_2 < t_2) : (s_j) \in \pi, (t_j) \in \pi\} \end{aligned}$$

bringen, wobei wir hier eine verkürzte Schreibweise verwenden. Da  $\pi$  kein Fixpunkt von  $\Psi$  ist, existiert ein minimales  $i$  mit  $1 \leq i \leq n$  und  $2i \approx_\pi 2i - 1$ . Wir untersuchen, wo das Paar  $(2i - 1, 2i)$  Auswirkung auf  $cr(\cdot)$  hat, wenn man von  $\pi$  zu  $\Psi(\pi)$  übergeht.

Das  $\alpha := (2i - 1, 2i)$  kann jedoch nur an die Stelle der Paare  $(s_1, t_1)$  oder  $(s_2, t_2)$  treten. Die Minimalität von  $i$  liefert uns sogar, dass nur  $\alpha = (s_1, t_1)$  gelten kann. Der Fall  $\alpha = (t_1, s_2)$  kann ebenfalls ausgeschlossen werden, denn dann wäre  $s_1 \in \{2j - 1, 2j\}$  mit  $j < i$ , woraus in beiden Fällen ein Widerspruch zur Minimalität von  $i$  folgt. Dies führt uns zu folgender Zerlegung der Kreuzung:

$$\begin{aligned} cr(\pi) &= \#\{(s_1 < t_1 < s_2 < t_2) : (s_j) \in \pi, (t_j) \in \pi, (s_1, t_1) = \alpha\} + \\ &\quad \#\{(s_1 < t_1 < s_2 < t_2) : (s_j) \in \pi, (t_j) \in \pi, (s_1, t_1) \neq \alpha \wedge (s_2, t_2) \neq \alpha\} \end{aligned}$$

Der zweite Term ist offensichtlich invariant unter der Anwendung von  $\tau$  auf die Blöcke. Betrachte also nur den ersten Term:

$$\begin{aligned} &\#\{(s_1 < t_1 < s_2 < t_2) : (s_j) \in \pi, (t_j) \in \pi, (s_1, t_1) = \alpha\} \\ &= \#\{(s_2 < t_2) : (2i - 1, s_2) \in \pi, (2i, t_2) \in \pi\} := A_\pi \end{aligned}$$

In  $A_\pi$  sind  $s_2$  und  $t_2$  aber bereits eindeutig durch  $\pi$  bestimmt (Paarpartitionseigenschaft). Wir verwenden die Notation  $\pi(i) := j$  für einen Block  $(i, j) \in \pi$ , dann folgt

$$A_\pi = \begin{cases} 1 & : \pi(2i - 1) < \pi(2i) \\ 0 & : \text{sonst} . \end{cases}$$

Da das  $\tau$  aber gerade die Elemente  $2i - 1$  und  $2i$  austauscht, erhalten wir

$$A_{\tau\pi} = \begin{cases} 0 & : A_\pi = 1 \\ 1 & : \text{sonst} \end{cases}$$

und sind wegen  $(-1)^{A_\pi} \neq (-1)^{A_{\tau\pi}}$  fertig. □

**Bemerkung 5.24** (Kombinatorischer Ansatz für die Randfälle)

In Beispiel 4.28 hatten wir das Maß  $\nu_q(dx)$  zwar noch nicht definiert, aber bereits eine kombinatorische Betrachtung für den Fall  $q = 0$  durchgeführt. Dabei hatten wir in diesem Spezialfall die Momente des Positionsoptors betrachtet und festgestellt, dass diese mit denen des Wigner'schen Halbkreisgesetzes übereinstimmen. Eine Folgerung aus dieser Tatsache, die wir in 4.28 jedoch nicht explizit genannt hatten, ist natürlich die schwache Konvergenz von  $\nu_q(dx)$  gegen das Halbkreisgesetz (Anwendung der *Momentenmethode*) wenn  $q \rightarrow 0$  läuft.

In der Tat ist dieser kombinatorische Ansatz auch bei den beiden Randfällen anwendbar und liefert auch dort die schwache Konvergenz gegen die jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaße. Wir erhalten somit eine abgeschwächte Form des Resultats aus Satz 5.15 und das Ergebnis aus Lemma 5.16 ohne den Einsatz der Fouriertransformierten.

Wir erinnern uns, dass man mit Hilfe der Wickformel (siehe Satz 4.26) die Momente eines Positionsoptors  $w(f)$  für normiertes  $f$  durch

$$\mathbb{E}[w(f)^{2k}] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} q^{cr(\pi)} \quad (k \in \mathbb{N}_1)$$

bestimmen kann, wobei ungerade Momente aus Symmetriegründen verschwinden. Es gilt also nachzuweisen, dass

$$\int t^{2k} d\nu_q(t) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} q^{cr(\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{N}_1$$

in den Fällen  $q = 1$  bzw.  $q = -1$  gilt und  $\int t^k d\nu_q(t) = 0$  für ungerades  $k$  ist. Es waren

$$\nu_1(dx) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \quad \text{sowie} \quad \nu_{-1}(dx) = \frac{1}{2} (\delta_{-1}(dx) + \delta_{+1}(dx)) ,$$

also verschwinden offensichtlich die ungeraden Momente.

Ist  $q = 1$  gesetzt, so ist

$$\sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} q^{cr(\pi)} = \#\mathcal{P}_2(2k) ,$$

also gilt es die Anzahl möglicher Paarpartitionen für die Menge  $\{1, 2, \dots, 2k\}$  zu betrachten. Wie wir leicht durch ein Abzählungsargument sehen, ist dies gerade

$$(2k - 1) \cdot (2k - 3) \cdots 3 \cdot 1 = (2k - 1)!! = \frac{(2k)!}{2^k k!} .$$

Aber dies ist nichts anderes als eine explizite Formel für die geraden Momente der Standardnormalverteilung.

Für den Fall  $q = -1$  verwenden wir die Bijektion aus Proposition 5.23. Es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} q^{cr(\pi)} &= \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_2(2k) \\ \Psi(\pi) = \pi}} (-1)^{cr(\pi)} + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_2(2k) \\ \Psi(\pi) \neq \pi}} (-1)^{cr(\pi)} \stackrel{5.23(2)}{=} (-1)^{cr(\pi_0)} + \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}_2(2k) \\ \Psi(\pi) \neq \pi}} (-1)^{cr(\pi)} \\ &\stackrel{5.23(1)}{=} 1 + \sum_{\substack{\{\pi_1 \neq \pi_2\} \in \mathcal{P}_2^2(2n) \\ \Psi(\pi_1) = \pi_2}} [(-1)^{cr(\pi_1)} + (-1)^{cr(\pi_2)}] \end{aligned} \quad (*)$$

und somit folgt unter Verwendung von 5.23 (3) die gewünschte Aussage  $\sum_{\pi \in \mathcal{P}_2(2k)} q^{cr(\pi)} = 1$ . Auf der anderen Seite ist

$$\int t^{2k} \nu_{-1}(dt) = \frac{1}{2} ((-1)^{2k} + (+1)^{2k}) = 1 \quad \forall k \in \mathbb{N}_1 ,$$

also folgt die Übereinstimmung der Momente.

Zur Anwendung der Momentenmethode (siehe Theorem 3.12 in [Dur96, Kapitel 2 (Central Limit Theorems)]) nutzen wir hier natürlich aus, dass sowohl  $\nu_{-1}(dx)$  als auch  $\nu_{+1}(dx)$  beides Maße sind, die eindeutig durch ihre Momentenfolgen bestimmt sind, d.h. die *Carleman Bedingung* erfüllen. Auch wollen wir erwähnen, dass die Abbildung  $q \mapsto \mathbb{E}[w(f)^k]$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  stetig ist und somit alle Voraussetzungen für die Anwendung des Theorems erfüllt sind.

Das Ergebnis in (\*) sowie die Bijektion aus Proposition 5.23 sind ein Spezialfall eines viel allgemeineren Resultats aus [MN97, Korollar 2.6], welches wie folgt lautet:

$$\sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(2n) \\ \pi \text{ gerade} \\ \text{typ}(\pi) = 2\lambda}} (-1)^{c_0(\pi)} = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(n) \\ \text{typ}(\pi) = \lambda}} 1 \quad (*)$$

Sei  $\pi = \{B_1, \dots, B_r\}$  eine Partition aus  $\mathcal{P}(n)$ , dann nennen wir  $\pi$  *gerade*, wenn  $|B_1|, \dots, |B_r|$  alles gerade Zahlen sind. Eine Paarpartition ist also Spezialfall einer geraden Partition. Weiterhin erhalten wir eine *Partition der natürlichen Zahl  $n$* , indem wir die Zahlen  $|B_1|, \dots, |B_r|$  absteigend anordnen. Bezeichne diese Anordnung als

$$\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > 0),$$

so nennen wir  $\lambda$  den *Typ* der Mengenpartition  $\pi$ . Man setzt  $2\lambda = (2\lambda_1 \geq 2\lambda_2 \geq \dots \geq 2\lambda_r > 0)$ , damit ist dies eine Partition von  $2n \in \mathbb{N}$ . Die Statistik  $c_0(\pi)$  sind die sogenannten *links-reduzierten Kreuzungen* nach Nica, denen wir bereits in Definition 2.10 begegnet sind. Der Beweis der Aussage verwendet die gleiche Bijektion  $\Psi$ , die Aussagen sind aber wesentlich aufwändiger zu zeigen, da im Allgemeinen die Paarpartitionseigenschaft wegfällt. In [MN97] finden sich viele weitere Resultate über den Fall  $q = -1$ . Insbesondere wird dort auch ein *Unabhängigkeitsbegriff* untersucht, ein Aspekt auf den wir im nächsten Abschnitt eingehen werden.





# 6 Prozesse, Unabhängigkeit und Konvolution

Historisch gesehen hätten wir die Betrachtung der  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie mit der  $q$ -Deformation von gewissen stochastischen Prozessen beginnen müssen. Denn der Begriff des  $q$ -deformierten Fockraums wurde erstmalig in [BS91] formuliert, wo er zur Interpolation zwischen der bosonischen und fermionischen Brown'schen Bewegung verwendet wurde.

Dieser letzte Abschnitt soll primär einen Ausblick darstellen. Einen Ausblick auf die Bereiche, die im Kontext der Konstruktion einer  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie ebenfalls eine gewisse Relevanz besitzen. Es gilt z.B. zu untersuchen, welche Art von Prozessen es auf den verallgemeinerten Räumen gibt. Da diese Prozesse immer Familien von Operatoren darstellen, kann die erzeugte von-Neumann-Algebra betrachtet werden und deren Struktur untersucht werden. Weiterhin ist die Formulierung eines geeigneten Konvolutions- sowie Unabhängigkeitsbegriffes von Bedeutung. Wir beginnen mit den oben genannten Prozessen:

**Bemerkung 6.1** (Stochastische Prozesse und verallgemeinerte Brown'sche Bewegungen)

Sei  $T$  ein Zeitparameterintervall, üblicherweise ist dies ein Intervall aus  $\mathbb{R}$ , dann nennen wir eine Abbildung  $c : T \times T \rightarrow \mathbb{R}$  *Kovarianzfunktion*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Es existiert ein separabler, reeller Hilbertraum  $(\mathcal{H}_0, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ .
- (2) In  $\mathcal{H}_0$  existiert eine Familie  $\{f_t\}_{t \in T}$  von Vektoren mit der Eigenschaft:  
Für alle  $s, t \in T$  gilt  $c(s, t) = \langle f_s | f_t \rangle$ .

Sei nun  $c$  eine Kovarianzfunktion mit zugehörigem Hilbertraum  $\mathcal{H}_0$  gegeben. Konstruiere den  $q$ -Fockraum  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  über der Komplexifizierung und definiere für alle  $t \in T$  die Operatoren  $X_t := w(f_t) \in \Gamma_q(\mathcal{H}_0)$ . Die von den Positionoperatoren erzeugte von-Neumann-Algebra  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  hatten wir in Definition 3.26 erklärt. Dann ist  $(X_t)_{t \in T}$  der  $q$ -Gauß'sche (stochastische) Prozess auf  $(\Gamma_q(\mathcal{H}_0), \mathbb{E})$  ( $\mathbb{E}$  der zu  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  gehörige kanonische Vakuumzustand) mit Kovarianz  $c$ . Mit Lemma 3.28 folgt dann die Relation

$$\mathbb{E}[X_s X_t] = c(s, t)$$

für alle Zeitpunkte  $s, t \in T$ .

Für verschiedene Wahlen von  $c$  erhält man die folgenden (verallgemeinerten) Prozesstypen:

- (i) Die  $q$ -Brown'sche Bewegung mit  $T = [0, \infty)$  und  $c(s, t) = \min(s, t)$ .
- (ii) Die  $q$ -Brown'sche Brücke mit  $T = [0, 1]$  und  $c(s, t) = s(1 - t)$  für  $s \leq t$ .
- (iii) Den  $q$ -Ornstein-Uhlenbeck Prozess mit  $T = \mathbb{R}$  und  $c(s, t) = \exp(-|t - s|)$ .

In [BKS97, Abschnitt 3] werden diese Prozesse genauer betrachtet, unter anderem mit der Fragestellung, ob auch in diesem Kontext eine Art *Markov-Eigenschaft* existiert. Diese Frage

kann positiv beantwortet werden, und insbesondere stellt man fest, dass die Eigenschaft nicht von der Wahl von  $q$ , sondern nur von der Struktur des zugrundeliegenden Hilbertraums abhängt. Weiterhin wird die Existenz von *klassischen Versionen* solcher  $q$ -Prozesse untersucht, dabei ist hier jedoch nicht die Betrachtung des Spezialfalls  $q = 1$  gemeint:

Sei ein (verallgemeinerter) stochastischer Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  auf einem nichtkommutativen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\mathcal{A}, \varphi)$  und ein klassischer reellwertiger Prozess  $(Y_t)_{t \in T}$  auf einem klassischen Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  gegeben. Dann nennt man  $(Y_t)_{t \in T}$  eine *klassische Version* von  $(X_t)_{t \in T}$ , wenn die zugehörigen zeitgeordneten Momente übereinstimmen, d.h. für alle  $n \in \mathbb{N}$ , alle  $t_1, \dots, t_n \in T$  mit  $t_1 \leq \dots \leq t_n$  und alle beschränkten Borelfunktionen  $h_1, \dots, h_n$  auf  $\mathbb{R}$  gilt die Relation

$$\varphi[h_1(X_{t_1}) \cdots h_n(X_{t_n})] = \int_{\Omega} h_1(Y_{t_1}(\omega)) \cdots h_n(Y_{t_n}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega).$$

Hier muss die Fragestellung leider negativ beantwortet werden. Eine Folgerung aus der *Bellschen Ungleichung* ist die Existenz von Prozessen, die kein klassisches Äquivalent besitzen. Allerdings kann dennoch eine Klasse von Prozessen angegeben werden, wo die Konstruktion eines klassischen Prozesses immer möglich ist. Diese Klasse besteht aus den Prozessen, die die vorher erwähnte Markov-Eigenschaft erfüllen.

Die Prozesstypen in [BKS97] sind noch relativ einfach, da man sich prinzipiell auf Positionsoperatoren und damit auf Operatoren mit  $q$ -Gauß'scher Verteilung einschränkt. In [Ans01] wird diese Einschränkungen aufgehoben, indem sogenannte  $q$ -Lévy-Prozesse definiert werden. Auf diese Prozesstypen werden wir kurz in Definition 6.12 eingehen.

### Beispiel 6.2

Wähle als  $\mu$  das Lebesgue-Maß auf  $\mathbb{R}$  und setze  $\mathcal{H}_0 := L^2(\mathbb{R}, \mu)$ , die auf  $\mathbb{R}$  quadratintegrablen Funktionen versehen mit dem kanonischen inneren Produkt. Sei  $T = \mathbb{R}_+$  und definiere für  $t \in T$  die Elemente  $f_t := \mathbb{1}_{[0,t]}$ . Dann gilt offensichtlich

$$\langle f_s | f_t \rangle = \langle \mathbb{1}_{[0,s]} | \mathbb{1}_{[0,t]} \rangle = \int \mathbb{1}_{[0,s]} \mathbb{1}_{[0,t]} d\mu = \min(s, t),$$

also ist  $\mathcal{H}_0$  ein Hilbertraum zur Kovarianzfunktion  $\min(\cdot, \cdot)$ . Erneut sei  $\mathbb{E}$  der kanonische Vakuumzustand, den wir in Definition 3.27 erklärt hatten.

Nun wissen wir, dass für  $q = 1$  die Operatoren klassisch gaußverteilt sind. Der Prozess  $(X_t)_{t \in T}$  kann also als Gauß-Prozess verstanden werden. Da ausserdem  $\mathbb{E}[X_t] = 0$  für alle  $t \in T$  gilt und nach obiger Rechnung  $\mathbb{E}[X_s X_t] = \min(s, t)$  ist, erhalten wir eine klassische Brown'sche Bewegung (*Wiener-Prozess*) zurück.

### Bemerkung 6.3 (Klassisches Wickprodukt)

In der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie definiert man für Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  ( $n \in \mathbb{N}_1$ ) mit endlichen Momenten (also  $\mathbb{E}[X_i^j] < \infty$  für alle  $i, j \in \mathbb{N}_1$ , wobei  $\mathbb{E}$  die klassische Erwartungswertfunktion ist) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum  $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$  (also  $\mathbb{E}[X] = \int X d\mathbb{P}$ ) und  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}_0$  das *Wickprodukt*

$$: X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} :$$

von  $X_1, \dots, X_n$  rekursiv durch die folgenden Vorschriften:

- (i) Der Ausdruck  $: X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} :$  ist ein Polynom in  $X_1, \dots, X_n$  mit Totalgrad  $k_1 + \dots + k_n$ .
- (ii) Es ist  $\mathbb{E}[: X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} :] = 0$ , wobei  $\mathbb{E}$  die zu  $\mathbb{P}$  gehörige Erwartungswertfunktion ist.

(iii) Es gilt  $\frac{\partial}{\partial X_i} (: X_1^{k_1} \cdots X_n^{k_n} :) = k_i \cdot (: X_1^{k_1} \cdots X_i^{k_i-1} \cdots X_n^{k_n} :)$  für  $k_i \geq 1$ , wobei die Operation  $\frac{\partial}{\partial X_i}$  hier als formale Differentiation des Polynoms zu verstehen ist.

Das *leere* Wickprodukt wird als  $\mathbf{1}$  gesetzt, also  $\mathbb{E}[: :] = 1$ . Die Notation durch Doppelpunkte, aus diesem Grunde in der Literatur auch unter *Wick dots* zu finden, entstammt der Physik.

Betrachten wir den einfachen Fall  $n = 1$  und setzen  $X := X_1$ , dann erhält man  $: X := X - \mathbb{E}[X]$ , da  $: X :$  nach Definition ein Polynom in  $X$  vom Grad 1 ist, für das  $\mathbb{E}[: X :] = 0$  erfüllt sein muss. Im nächsten Schritt muss  $\frac{\partial}{\partial X} : X^2 := 2 \cdot : X :$  gelten. Durch *formale* Integration erhalten wir einen Ausdruck der Form  $X^2 - 2 \mathbb{E}[X]X + \alpha$  mit  $\alpha$  einem konstanten Term. Die Zentrierungsbedingung (ii) liefert sofort  $\alpha = 2 \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2]$  und folglich gilt

$$: X^2 := X^2 - 2 \mathbb{E}[X]X + 2 \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[X^2] .$$

Für den Fall  $n = 2$  erhalten wir mit  $X := X_1, Y := X_2$  die Wickprodukte

$$\begin{aligned} : X := X - \mathbb{E}[X] \quad \text{bzw.} \quad : Y := Y - \mathbb{E}[Y] \\ : XY := XY - \mathbb{E}[Y]X - \mathbb{E}[X]Y + 2 \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[XY] . \end{aligned}$$

Wählt man  $X$  als eine standardnormalverteilte Größe, so erhält man die elegante Formel

$$: X^n := H_n(X) , \tag{6.1}$$

wobei die  $H_n(x)$  die Hermitepolynome aus Bemerkung 5.3 sind. Die Wickprodukte haben darüberhinaus eine interessante Verbindung zum bosonischen ( $q = 1$ , symmetrisch) Fockraum, die durch den *Wiener-Itô-Isomorphismus* (oder auch *Itô-Wick-Segal* genannt) gegeben ist. In [Pat02, Abschnitt 1.2] und insbesondere dem dortigen Theorem 1.2.1 wird diese Abbildung, die von  $\mathfrak{F}_1(\mathcal{H})$  nach  $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  (für einen geeigneten W-Raum  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ) abbildet, genauer beschrieben.

Da das klassische Wickprodukt also Verbindungen zum symmetrischen Fockraum, also der *klassischen* Welt, aufweist, ist zu vermuten, dass man hier ebenfalls eine  $q$ -Verallgemeinerung finden kann, die das Wickprodukt aus 6.3 zumindestens für einige Eigenschaften als Spezialfall beinhaltet. Wir sprechen hier von *einigen Eigenschaften*, da auf dem  $q$ -Fockraum grundsätzlich nur die Positionsooperatoren hinreichend genau untersucht wurden. Nehmen wir die allgemeine Definition einer  $q$ -Zufallsvariable aus Definition 5.20, betrachten also einen selbstadjungierten beschränkten Operator auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ , so ist nicht klar, wie dieser Operator genau auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  wirkt oder wie man explizit die Momente bzgl. des Vakuums  $\Omega$  berechnet. Konkrete Aussagen lassen sich also momentan nur über die recht kleine Klasse der Positionsooperatoren treffen.

Eine *Ausweitung* des Positionsooperatorbegriffes wird in Definition 6.11 durch den *Gauge-Operator* gegeben werden.

**Bemerkung 6.4** (Wickabbildung im Kontext von  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ )

Sei  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  wie in Definition 3.26 gegeben und betrachte die Abbildung

$$\alpha : \Gamma_q(\mathcal{H}_0) \rightarrow \mathfrak{F}_q(\mathcal{H}) ,$$

die durch  $X \mapsto X\Omega$  definiert wird. Die Eigenschaften des Vakuumvektors  $\Omega$ , die wir in Bemerkung 3.30 aufgelistet hatten, liefern die Injektivität dieser Abbildung. Das Bild von  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  unter  $\alpha$  wird mit  $L_q^\infty(\mathcal{H}_0)$  bezeichnet. Zusätzlich setzt man  $L_q^2(\mathcal{H}_0) := \mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ , dann gilt offensichtlich

$L_q^\infty(\mathcal{H}_0) \subseteq L_q^2(\mathcal{H}_0)$  analog zur Eigenschaft der  $L^p$ -Räume aus der klassischen Wahrscheinlichkeitstheorie. Der Grund dieser Notation wird offensichtlicher, wenn man die Interpretation der  $q$ -Wickabbildung, die wir im Folgenden angeben werden, als iteriertes quantenstochastisches Integral in [BKS97, Bemerkung 2.6]) betrachtet.

Mit diesen Voraussetzungen identifiziert man nun  $L_q^\infty(\mathcal{H}_0)$  mit  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$  vermöge der Abbildung

$$\Psi : L_q^\infty(\mathcal{H}_0) \rightarrow \Gamma_q(\mathcal{H}_0) \quad \text{durch die Bedingung} \quad \Psi(\xi)\Omega = \xi \text{ für } \xi \in L_q^\infty(\mathcal{H}_0),$$

wobei der Operator  $\Psi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n)$  in der Quantenfeldtheorie analog zu Bemerkung 6.3 als

$$\Psi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = :w(f_1) \cdots w(f_n):$$

in Doppelpunktschreibweise notiert wird. Die Wohldefiniertheit von  $\Psi$  wird durch die Injektivität von  $\alpha$  gesichert. Diese Wickabbildung  $\Psi$  hat nun ähnliche Eigenschaften wie das klassische Wickprodukt. Unter anderem erhält man

$$\Psi(f^{\otimes n}) = H_n^{(q)}(w(f)) \tag{6.2}$$

mit  $H_n^{(q)}(x)$  den  $q$ -Hermitepolynomen aus Definition 5.5 und einem normierten  $f$ . Da die  $w(f)$  die verallgemeinerten *Gauß'schen* Zufallsgrößen sind, ist dieses Ergebnis (6.2) vollständig analog zu (6.1) aus Bemerkung 6.3. Allgemeiner folgt

$$\Psi(f^{\otimes n}) = \|f\|^n H_n^{(q)}\left(\frac{w(f)}{\|f\|}\right),$$

wenn  $f \in \mathcal{H}$  mit  $f \neq 0$  gewählt wird. Der Ausdruck  $\Psi(f^{\otimes n})$  lässt sich ebenfalls durch eine  $q$ -binomiale Summe der Form

$$\Psi(f^{\otimes n}) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}_q a^*(f)^k a(f)^{n-k}$$

ausdrücken (siehe [BKS97, Korollar 2.8]), wobei dies allerdings nur ein Spezialfall der Formel (aus [BKS97, Proposition 2.7]) für die *normal geordnete* Darstellung

$$\Psi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=n}}^n \sum_{\substack{I_1=\{i_1,\dots,i_k\} \\ I_2=\{j_1,\dots,j_l\}}} q^{i(I_1,I_2)} \cdot a^*(f_{i_1}) \cdots a^*(f_{i_k}) a(f_{j_1}) \cdots a(f_{j_l})$$

ist. Dabei soll in der obigen Summe  $I_1 \dot{\cup} I_2 = \{1, \dots, n\}$  für alle  $k, l$  gelten. Die Abbildung  $i(I_1, I_2)$  ist durch

$$i(I_1, I_2) = \#\{(s, t) : i_s > j_t\} \quad (I_1, I_2 \text{ in der obigen Form})$$

definiert. In [EP03] findet sich eine weitere Möglichkeit das  $q$ -Wickprodukt zu notieren, diesmal durch Summation über die in Definition 2.11 bereits kurz erwähnten Feynman-Diagramme. Wir erinnern uns, dass diese Diagramme als Paarpartitionen mit zusätzlichen unverbundenen Elementen, den Singletons, definiert waren. Bezeichne mit  $F(n)$  die Feynman-Diagramme auf  $\{1, \dots, n\}$ , dann liefert der auf  $F(n)$  erweiterte Kovarianzbegriff aus Definition 4.11 den Ausdruck

$$\Psi(f_1 \otimes \dots \otimes f_n) = \sum_{\pi \in F(n)} (-1)^{|\pi|} q^{ip(\pi) + rc(\pi)} \text{cov}(\pi).$$

Die Partitionsstatistik der inneren Punkte  $ip(\cdot)$  hatten wir ebenfalls in 2.11 erklärt.

Wir erinnern hier an den Unabhängigkeitsbegriff aus der *freien W-Theorie*, genannt *Freiheit*, wie er in [NS06, Definition 5.3] formuliert ist.

**Definition 6.5** (Freiheit)

Sei  $(\mathcal{A}, \varphi)$  ein nichtkommutativer Wahrscheinlichkeitsraum und  $I$  eine beliebige Indexmenge.

- (1) Sei  $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$  eine Familie unitärer Unteralgebren von  $\mathcal{A}$ . Dann nennt man  $(\mathcal{A}_i)$  *frei*, falls gilt: Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und Elemente  $a_j \in \mathcal{A}_{i(j)}$  ( $1 \leq j \leq k$ ) mit den Eigenschaften

- (i)  $\varphi(a_j) = 0$  für alle  $j$  (Elemente sind zentriert)  
(ii)  $i(1) \neq i(2) \neq \dots \neq i(k)$  (*Benachbarte* Elemente stammen nicht aus Unteralgebren mit gleichen Indizes)

gilt für das Produkt der Elemente  $\varphi(a_1 a_2 \cdots a_k) = 0$ .

- (2) Seien  $b_i \in \mathcal{A}$  ( $i \in I$ ) Zufallsvariablen, dann nennt man diese *frei*, wenn die erzeugten Unteralgebren nach (1) frei sind.

In Beispiel 5.14 hatten wir gesehen, dass der freie Fockraum (also  $q = 0$ ) das Wigner'sche Halbkreisgesetz aus der freien Wahrscheinlichkeitstheorie als Verteilung des zugehörigen Positionsoptors liefert. Man könnte nun vermuten, dass man im  $q$ -Fockraum auch die Struktur der *Freiheit* von Voiculescu in irgendeiner Weise zurückerhält, wenn man auf den Fall  $q = 0$  übergeht. Und dies ist in der Tat richtig:

**Lemma 6.6** (Struktur der freien Unabhängigkeit)

Hier ist zuallererst zu beachten, dass sich für  $q = 0$  viele der  $q$ -Konstruktionen sehr stark vereinfachen. Der Vernichtungsoperator  $a(f)$  (siehe Definition 3.9) erhält die einfache Form

$$a(f)f_1 \otimes \dots \otimes f_n = \langle f | f_1 \rangle f_2 \otimes \dots \otimes f_n ,$$

enthält also insbesondere keine Summe mehr, und die  $q$ -Vertauschungsrelation aus Lemma 3.12 reduziert sich auf die Gleichung

$$a(f)a^*(g) = \langle f | g \rangle \cdot \mathbf{1} . \quad (*)$$

Man rechnet also hier im freien Fockraum (*full Fock space*), der physikalisch einem dynamischen System von nicht miteinander wechselwirkenden Teilchen entspricht. Da die Wechselwirkung wegfällt, ist zu erwarten, dass die Rechnungen erheblich simpler werden. Das verwendete Skalarprodukt ist  $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathfrak{F}}$  aus Definition 3.7. In diesem Kontext gilt dann folgende Aussage:

Sei  $\mathcal{H}$  der dem freien Fockraum zugrundeliegende Hilbertraum und betrachte im Folgenden den  $C^*$ -Wahrscheinlichkeitsraum (siehe [NS06, Lecture 3] für eine ausführliche Definition)

$$(B(\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})), \mathbb{E}) ,$$

wobei  $\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})$  der erwähnte freie Fockraum ist und  $\mathbb{E}$  der vom Vakuum  $\Omega$  induzierte kanonische Zustand. In Definition 3.27 war der Vakuumzustand  $\mathbb{E}$  nur auf  $\Gamma_q(\mathcal{H}_0)$ , der von den reellen Positionsoptoren erzeugten von-Neumann-Algebra definiert worden. Hier soll er jedoch als ein Zustand auf ganz  $B(\mathfrak{F}_0(\mathcal{H}))$  verstanden werden.

Seien  $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_k \subseteq \mathcal{H}$  lineare Unterräume mit  $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$  für alle  $1 \leq i, j \leq k$  mit  $i \neq j$ . Definiere für jedes  $1 \leq i \leq k$  die  $C^*$ -Unteralgebra  $\mathcal{A}_i$ , die von den Operatoren  $\{a^*(f) : f \in \mathcal{H}_i\}$  erzeugt wird. Dann sind  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$  frei unabhängige Unteralgebren von  $(B(\mathfrak{F}_0(\mathcal{H})), \mathbb{E})$ .

*Beweis.* Siehe [NS06, Proposition 7.15] für einen ausführlichen Beweis. Dieser nutzt massiv die obige Relation (\*) aus, mit der sich beliebige Produkte von Vernichtungs- und Erzeugungsoperator erheblich in ihrer Komplexität reduzieren lassen, wie wir bereits in Bemerkung 3.21 angemerkt hatten.  $\square$

**Bemerkung 6.7** (Orthogonalität und Unabhängigkeit)

In Lemma 6.6 hatten wir gesehen, dass zumindestens im Fall  $q = 0$  die Orthogonalitätseigenschaft des Systems  $\{\mathcal{H}_i\}_i$  die Freiheit des Systems  $\{\mathcal{A}_i\}_i$  liefert. Man kann sich nun fragen, ob man über die Orthogonalität für beliebige  $q \in [-1, 1]$  einen Unabhängigkeitsbegriff im jeweiligen  $q$ -Fockraum erhält.

Geht man einen Schritt weiter, so stellt sich die Frage, ob es nicht möglich ist, für jedes  $q \in [-1, 1]$  eine *eigenständige*  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie zu erhalten, in der wir dann zentrale Objekte wie Grenzwertsätze, den Unabhängigkeitsbegriff, eine Faltung (*Konvolution*), etc. (also Objekte, wie man sie aus der klassischen und freien  $W$ -Theorie kennt) wiederfinden können. Dies führt zu zahlreichen Problemen, da insbesondere geklärt werden muss, welche Eigenschaften man von diesen verallgemeinerten Begriffen noch erwarten kann. Leider gibt es momentan starke Anzeichen, dass die Spezialfälle  $q = 0$  und  $q = 1$  wirkliche Spezialfälle in dem Sinne sind, dass wichtige, von einer  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie gewünschte, Eigenschaften in den anderen Fällen  $q \in (-1, 1) \setminus \{0\}$  schlicht nicht mehr gelten.

Wir wollen uns einen Überblick darüber verschaffen, was in diesem Gebiet momentan bekannt ist. Genauer interessieren wir uns für Aussagen über die Existenz von  $q$ -Unabhängigkeit und  $q$ -Faltungen:

**Bemerkung 6.8** (Notation für Polynomialgebren)

Im Folgenden bezeichnen wir durch  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_k]$  die Polynomialgebra mit Koeffizienten in  $\mathbb{C}$  und  $k$  kommutierenden Variablen  $x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ). Die Polynomialgebra mit *nichtkommutierenden* Variablen wird hingegen als  $\mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  notiert.

**Definition 6.9** ( $q$ -Faltung nach Nica)

Nica beschreibt in seiner Arbeit [Nic95] eine mögliche  $q$ -Deformation der Faltung für Wahrscheinlichkeitsmaße. Diese sogenannte  $q$ -Konvolution soll zwischen der bekannten Faltung aus der klassischen  $W$ -Theorie und der Faltung der freien  $W$ -Theorie interpolieren.

Die Rechnungen werden dabei für einen Parameter  $q \in [0, 1]$  durchgeführt, es wird jedoch erwähnt, dass alle Aussagen auch bei der Wahl  $q \in (-1, \infty)$  richtig bleiben. Die Konstruktion der Konvolution wird nicht direkt durchgeführt, sondern man betrachtet diejenige Transformation, die den Konvolutionsoperator linearisiert, also in eine additive Form bringt. In der klassischen Theorie ist diese Transformation gerade der Logarithmus der Fouriertransformierten, da bekanntlich

$$\log \mathcal{F}(\mu_1 \boxplus \mu_2) = \log \mathcal{F}(\mu_1) + \log \mathcal{F}(\mu_2)$$

gilt, wenn  $\mathcal{F}(g) = \hat{g}$  die Fouriertransformation und  $\boxplus$  die klassische Faltung ist. Dabei ist in der obigen Gleichung die Abbildung  $\log \mathcal{F}(\cdot)$  mehr als eine formale Operation zu interpretieren, die den Konstruktionsansatz motivieren soll. In der freien Theorie wird die Rolle des Linearisierungsoperators durch die  $\mathcal{R}$ -Transformation eingenommen, es wird also eine Art  $\mathcal{R}_q$ -Transformation gesucht. Folgende zusätzlichen Bedingungen werden vorausgesetzt:

- (i) Es werden nur Wahrscheinlichkeitsmaße  $\mu$  mit  $m_k(\mu) < \infty$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  betrachtet, wobei

$$m_k(\mu) := \int t^k d\mu(t)$$

die Momente von  $\mu$  sind.

- (ii) Ein vereinfachter algebraischer Ansatz wird verwendet: Anstatt des Maßes  $\mu$  betrachtet man die Momentenfolge  $(m_k(\mu))_{k \in \mathbb{N}}$ . Das Problem der Maße, die durch ihre Momentenfolge *nicht* eindeutig bestimmt sind, wird nicht thematisiert.

Damit kann  $\mu$  als ein lineares Funktional auf der Polynomalgebra  $\mathbb{C}[x]$  aufgefasst werden. Man schreibt also  $\mu(f) := \int f(t)d\mu(t)$  für ein Polynom  $f \in \mathbb{C}[x]$ . Damit setzt man nun

$$\Sigma := \{\mu : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C} \mid \mu \text{ linear mit } \mu(1) = 1\}$$

und sieht, dass ein  $\mu \in \Sigma$  durch die Folge der  $m_k(\mu) = \mu(x^k)$  bereits eindeutig charakterisiert ist. Wähle  $\mu_1, \mu_2 \in \Sigma$ , dann ist das Tensorprodukt  $\mu_1 \otimes \mu_2$  als das lineare Funktional auf  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$  zu verstehen, welches durch die Relation  $(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1^m x_2^n) = \mu_1(x_1^m) \mu_2(x_2^n)$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ) definiert ist. Die klassische Faltung  $\boxplus_1$  ist dann durch die Operation

$$(\mu_1 \boxplus_1 \mu_2)(f) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(f(x_1 + x_2)) \quad \text{für } f \in \mathbb{C}[x]$$

gegeben. Für eine Darstellung der freien Faltung ersetzt man das Tensorprodukt  $\otimes$  durch das sogenannte freie Produkt  $\star$  aus [VDN92, Abschnitt 1.5] und betrachtet anstatt  $\mathbb{C}[x_1, x_2]$  die Polynomalgebra  $\mathbb{C}\langle x_1, x_2 \rangle$ . Die Abbildung  $\star$  ist ebenfalls ein lineares Funktional, aber dieses Mal auf der Algebra der Polynome in *nichtkommutierenden* Variablen  $x_1$  und  $x_2$  definiert. Wir haben also

$$(\mu_1 \boxplus_0 \mu_2)(f) = (\mu_1 \star \mu_2)(f(x_1 + x_2)) \quad \text{für } f \in \mathbb{C}[x],$$

wenn die  $\boxplus_0$  die freie Faltung ist. Wir implizieren durch die Notation natürlich bereits, dass  $\boxplus_1$  und  $\boxplus_0$  Spezialfälle einer vom Parameter  $q$  abhängigen Faltung  $\boxplus_q$  sind.

In diesem algebraischen Kontext ist die Fouriertransformierte  $\mathcal{F}(\mu)$  eine formale Potenzreihe

$$\mathcal{F}(\mu)(z) = \hat{\mu}(z) = \int \exp(izt)d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k z^k}{k!} \int t^k d\mu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \mu(x^k)}{k!} z^k$$

mit  $\mathcal{F}(\mu)(0) = 1$ . Für formale Potenzreihen  $\varphi$  diesen Typs ist der Logarithmus

$$\log(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (-1)^{k+1} (\varphi - 1)^k$$

wieder eine formale Reihe und es folgt, dass  $\log \mathcal{F}(\mu)$  eine in 0 verschwindende Potenzreihe ist.

Man kann nun zeigen, dass sowohl die Operation  $\log \mathcal{F}(\cdot)$  als auch die  $\mathcal{R}$ -Transformation Bijektionen von der Menge  $\Sigma$  der in diesem Kontext betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaße in eine Teilmenge

$$\Theta_0 \subseteq \Theta := \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k : (\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_1} \subseteq \mathbb{C} \right\}$$

sind. Das  $\Theta$  sind gerade die formalen Potenzreihen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{C}$ , die im Punkt 0 verschwinden. Der *interpolierende* Operator  $\mathcal{R}_q$  muss also eine Bijektion von  $\Sigma$  nach  $\Theta_0$  definieren und für  $q = 0$  in die  $\mathcal{R}$ -Transformation sowie für  $q = 1$  in  $\log \mathcal{F}(\cdot)$  übergehen. Die jeweilige Faltungsoperation auf  $\Sigma$  erhält man dann dadurch, dass die *punktweise Addition* von Potenzreihen in  $\Theta_0$  betrachtet wird und diese Operation durch  $\mathcal{R}_q$  auf  $\Sigma$  zurücktransportiert wird.

Die in [Nic95] konstruierte Familie von Bijektionen  $\mathcal{R}_q$  erfüllt genau diese Voraussetzungen, liefert jedoch im Randfall  $q = 1$  nicht  $\log \mathcal{F}(\cdot)$ , sondern eine Variante, die aber ebenfalls ein linearisierender Operator ist: Für  $\mu \in \Sigma$  betrachtet man die Abbildung  $z \mapsto -iz(\log \mathcal{F}(\mu))'(-iz)$ .

Es werden nun drei äquivalente Darstellungen der  $\mathcal{R}_q$ -Transformation angegeben, von denen wir hier nur zwei angeben wollen. Ist ein Element aus  $\Theta_0$  und damit eine Koeffizientenfolge  $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegeben, so definiert man die Momente als

$$\mu(x^n) = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(n) \\ \pi = \{B_1, \dots, B_k\}}} q^{c_0(\pi)} \prod_{j=1}^k [|B_j| - 1]_q! \alpha_{|B_j|}, \quad (6.3)$$

wobei  $|B_j|$  die Anzahl der Elemente des Blocks sind. Wir wollen anmerken, dass die  $\alpha_n$  auch als die (zu dieser speziellen Faltung zugehörigen)  $q$ -Kumulanten bezeichnet werden. Für  $q = 0$  reduziert sich dieser Ausdruck wegen  $[|B| - 1]_q! = 1$  für jeden Block  $B$  zu

$$\mu(x^n) = \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{NC}(n) \\ \pi = \{B_1, \dots, B_k\}}} \prod_{j=1}^k \alpha_{|B_j|}.$$

Diese Relation zwischen der Momentenfolge und der Koeffizientenfolge der  $\mathcal{R}$ -Transformierten von  $\mu$  durch Verwendung der nichtkreuzenden Partitionen findet man bereits in Abschnitt 4 der Arbeit [Spe94], die die weitreichende Relevanz dieses Partitionstyps in der freien Wahrscheinlichkeitstheorie beleuchtet.

Eine weitere Beschreibung, die wir nur kurz betrachten wollen, orientiert sich enger an der ursprünglichen Definition der  $\mathcal{R}$ -Transformation. Für  $q \in [0, 1)$  werden auf dem Raum  $l_2(\mathbb{N})$  der quadratsummierbaren Folgen (mit Werten in  $\mathbb{C}$ ) die gewichteten linearen Shiftoperatoren

$$\begin{aligned} S_q \delta_n &= \sqrt{[n+1]_q} \delta_{n+1} \quad (n \geq 0) \\ S_q^* \delta_0 &= 0, \quad S_q^* \delta_n = \sqrt{[n]_q} \delta_{n-1} \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

betrachtet. Die Elemente  $\{\delta_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  sollen dabei die kanonische Basis des  $l_2(\mathbb{N})$  bilden. Wie man vermutet, sind diese Shifts gerade so konstruiert, dass die  $q$ -Kommutationsrelation aus Lemma 3.12, also in diesem Fall  $S_q^* S_q - q S_q S_q^* = \mathbf{1}$ , erfüllt wird. Rekursiv erhält man nun mit dem Operator

$$T_q = S_q^* + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{k+1} S_q^k, \quad (*)$$

der von der Koeffizientenfolge aus  $\Theta_0$  abhängt, durch die Vorschrift

$$\mu(x^n) = \langle \delta_0 | T_q^n \delta_0 \rangle \quad (**)$$

einen Algorithmus ( $\langle \cdot | \cdot \rangle$  das Standardskalarprodukt auf  $l_2(\mathbb{N})$ ), um aus der Momentenfolge die  $q$ -Kumulantenfolge bzw. umgekehrt zu konstruieren. Da aus operatortechnischer Sichtweise der Ausdruck (\*) natürlich keinen Sinn macht (die Reihe ist divergent im Sinne der Operatornorm), wird für die konkreten Rechnungen mit der *unendlich-dimensionalen* Matrixdarstellung

$$(S_q)_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{[i]_q} & : i - j = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \quad (S_q^*)_{i,j} = \begin{cases} \sqrt{[j]_q} & : j - i = 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

der Operatoren gearbeitet ( $i, j \in \mathbb{N}_0$ ). Dies hat zusätzlichen Vorteil, dass die Aussagen selbst noch für den Fall  $q = 1$  funktionieren. Die Projektion auf das erste Basiselement in (\*\*) wird



damit zur Betrachtung des Eintrags  $(0, 0)$  der darstellenden Matrix. Die Details zu dieser Art der Darstellung findet man in [Nic95, Abschnitt 1.1.B, Matrices].

Mit der konstruierten Abbildung  $\mathcal{R}_q$  ist es dann auch möglich, einen zentralen Grenzwertsatz (siehe [Nic95, Satz 4.2]) zu formulieren: Sei  $q \in [0, 1]$  der Deformationsparameter und  $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}_1}$  eine Folge von Verteilungen aus  $\Sigma$  mit den Eigenschaften:

- (i) Für alle  $k \in \mathbb{N}_1$  gilt  $\mu_k(x) = 0$ .
- (ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \mu_j(x^2) = 1$
- (iii) Für alle  $n \geq 2$  gilt  $\sup_k |\mu_k(x^n)| < \infty$ .

Unter diesen Bedingungen konvergiert der Ausdruck  $(\mu_1 \boxplus_q \cdots \boxplus_q \mu_n) \circ D_{1/\sqrt{n}}$  für  $n \rightarrow \infty$  schwach gegen die Verteilung  $\mathcal{R}_q^{-1}(z^2)$ , wobei schwache Konvergenz hier als Konvergenz sämtlicher Momente zu verstehen ist. Der Operator  $D_q : \mathbb{C}[x] \rightarrow \mathbb{C}[x]$  ist die durch  $D_r(x) = rx$  ( $r \in \mathbb{R}$ ) induzierte Dilation.

Die Fragestellung, ob für zwei Maße  $\mu_1, \mu_2 \in \Sigma$  der Ausdruck  $\mu_1 \boxplus_q \mu_2$  immer eine Momentenfolge liefert, die auch einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$  entspricht, wird in [Nic95] nicht untersucht. Diese Eigenschaft des Operators  $\boxplus_q$  wird auch als *Positivität* bezeichnet.

**Bemerkung 6.10** (Positivität der Nica-Faltung)

In [Ora05] wird schließlich diese Fragestellung bzgl. der Positivität beantwortet, leider in negativer Weise. Positivität bedeutet in diesem Kontext, dass die Menge der in [Nic95] betrachteten Wahrscheinlichkeitsmaße abgeschlossen unter der  $q$ -Faltung ist. Also insbesondere auch, dass für  $\mu \in \Sigma$  der Ausdruck  $\mu^{\boxplus_q N}$ , die  $N$ -fache  $q$ -Faltung des Maßes  $\mu$  mit sich selbst, wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf der reellen Achse liefert.

Dazu wird die Konstruktionsidee der *freien Poissonverteilung* aus [NS06, Lecture 12] als Grundlage verwendet. Man betrachtet die Folge der Maße

$$\mu_N(dx) := \left(1 - \frac{\lambda}{N}\right) \delta_0(dx) + \frac{\lambda}{N} \delta_1(dx)$$

für den festen Parameter  $\lambda > 0$ . Analog zur klassischen bzw. freien Theorie, in der

$$\mu_N(dx)^{\boxplus_1 N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{klass. Poissonverteilung}$$

bzw.

$$\mu_N(dx)^{\boxplus_0 N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \text{freie Poissonverteilung}$$

gilt (mit  $\boxplus_1$  und  $\boxplus_0$  den jeweiligen Faltungen), betrachtet man nun

$$\mu_N(dx)^{\boxplus_q N} \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

was eine Art  $q$ -deformierte Poissonverteilung liefern sollte. Man erhält durch diese Methode tatsächlich eine Momentenfolge, kann aber zeigen (*Momentenproblem* in der Wahrscheinlichkeitstheorie), dass sich diese  $q$ -Poissonverteilung außer in den Spezialfällen  $q = 0$  und  $q = 1$  nicht als Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$  realisieren lässt.

Dazu betrachtet man als erstes die Momente

$$m_0(\mu_N) = 1, \quad m_n(\mu_N) = \frac{\lambda}{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}_1$$

von  $\mu_N$  und verwendet dann (\*\*) aus Definition 6.9 um die zugehörigen  $q$ -Kumulanten zu gewinnen. Diese verhalten sich natürlich linear unter der entsprechenden  $q$ -Konvolution, sodass sehr einfach die  $q$ -Kumulanten des Ausdrucks  $\mu_N^{\boxplus q N}$  bestimmt werden können. An dieser Stelle geht man zum Limes  $N \rightarrow \infty$  über und konstruiert sich so die  $q$ -Kumulanten

$$\bar{\alpha}_1 = \lambda, \quad \bar{\alpha}_n = \frac{\lambda}{[n-1]_q!} \quad \forall n \geq 2$$

einer *möglichen*  $q$ -Poissonverteilung. Da die Vorschrift (\*\*) aus 6.9 bijektiv ist, kann man auch die zugehörigen Momenten dieser Verteilung angeben. Berechnung der Determinanten

$$\begin{vmatrix} \bar{m}_0 & \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 \\ \bar{m}_1 & \bar{m}_2 & \bar{m}_3 & \bar{m}_4 \\ \bar{m}_2 & \bar{m}_3 & \bar{m}_4 & \bar{m}_5 \\ \bar{m}_3 & \bar{m}_4 & \bar{m}_5 & \bar{m}_6 \end{vmatrix} = \lambda^5 (q^2(q-2+q^3) + \lambda[2]_q^2[3]_q)$$

zeigt, dass für  $q \in (0, 1)$  und  $\lambda$  klein gewählt, kein entsprechendes Maß existiert, welches diese ersten sechs Momenten besitzt. Aus Stetigkeitsgründen erhält man, dass für alle  $q \in (0, 1)$  ein  $N_q \in \mathbb{N}$  existiert, derart dass  $\mu_{N_q}^{\boxplus q N_q}$  keinem Wahrscheinlichkeitsmaß auf  $\mathbb{R}$  entspricht.

Es gibt einige Andeutungen, dass die Wahl der *richtigen* Statistik für die Kreuzungen einer Partition (links-reduzierte Kreuzungen nach Nica aus 2.10, eingeschränkte Kreuzungen nach Biane aus 2.9) eine entscheidende Rolle für die Qualität der entstehenden Faltung spielt. Der Faltungsoperator aus Definition 6.9 baut auf den *links-reduzierten* Kreuzungen auf, scheint aber nicht alle von einer Faltung gewünschten Eigenschaften zu erfüllen. Wir betrachten nun einen weiteren Faltungsoperator, der auf den *eingeschränkten* Kreuzungen basiert. Gleichzeitig ist dieser  $q$ -Faltungsoperator technisch wesentlich aufwändiger zu konstruieren. Wir geben nur einen groben Abriss, wie man zu dem entsprechenden Operator gelangt:

Zur Angabe des zu dieser Faltung gehörigen Definitionsbereichs (gemeint ist die Menge der Maße, für die die Faltung *positiv* operiert) ist es nötig einen weiteren Prozesstyp einzuführen, der den  $q$ -Gauß'schen Typ aus Bemerkung 6.1 verallgemeinert. Die Idee dabei ist, dem Positionsoperator  $w(f)$  weitere Komponenten hinzuzufügen. Eine Komponente wird der Gauge-Operator sein, der einen auf dem zugrundeliegenden Hilbertraum  $\mathcal{H}$  definierten Operator auf den  $q$ -Fockraum erweitert:

**Definition 6.11** (Gauge-Operator)

Sei  $\mathcal{H}$  ein Hilbertraum,  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{H}$  dichter Teilraum und  $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{H}$  ein linearer Operator. Man definiert den *Gauge-Operator* (auch *Erhaltungoperator* oder *zweite Quantisierung* genannt)  $p(T)$  auf dem Definitionsbereich  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{D})$  durch

$$(i) \quad p(T)\Omega = 0$$

$$(ii) \quad p(T)\eta_1 \otimes \dots \otimes \eta_k = \sum_{i=1}^k q^{i-1} (T\eta_i) \otimes \eta_1 \otimes \dots \otimes \check{\eta}_i \otimes \dots \otimes \eta_k \quad \text{für } \eta_1, \dots, \eta_k \in \mathcal{D}$$

und erweitert danach linear. Man beachte, dass der Definitionsbereich dicht in  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  ist. Falls der Operator  $T$  essentiell selbstadjungiert (also symmetrisch und eindeutig auf einen selbstadjungierten Operator erweiterbar) mit  $T(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  ist, so ist  $p(T)$  ebenfalls essentiell selbstadjungiert auf  $\mathfrak{F}_{\text{alg}}(\mathcal{D})$ . Einen Beweis sowie weitere Varianten, den Gauge-Operator einzuführen, findet man in [Ans01, Proposition 2.2]. In [GHW09, Quantization (First, Second)] wird der Begriff der *zweiten Quantisierung* (sowie der *ersten*, die sich auf die Quantisierung des Raumes bezieht) erläutert. Eigenschaften der Operatoren  $p(T)$  findet man in [Ans04].

**Definition 6.12** ( $q$ -Lévy-Prozesse)

Sei  $\mathcal{V}$  Hilbertraum,  $\xi \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$  dichte Teilmenge und  $T$  ein auf  $\mathcal{D}$  definierter essentiell selbstadjungierter Operator, derart dass die Bedingungen

- (i) Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  ist der lineare Aufspann der Menge  $\{T^n \xi : n \geq 0\}$ .
- (ii) Der Vektor  $\xi$  ist für  $T$  analytisch, d.h. für ein  $t > 0$  gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|T^k \xi\|}{k!} t^k < \infty .$$

erfüllt sind. Konstruiere den  $q$ -Fockraum über

$$\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R}_+, dx) \otimes \mathcal{V}$$

und definiere für halboffene Intervalle  $I \subseteq \mathbb{R}_+$  die Operatoren

$$\begin{aligned} a_I(\xi) &:= a(\mathbf{1}_I \otimes \xi), \quad a_I^*(\xi) := a^*(\mathbf{1}_I \otimes \xi) \\ p_I(T) &:= p(\mathbf{1}_I \otimes T), \end{aligned}$$

wobei  $a(\cdot)$  und  $a^*(\cdot)$  die in 3.9 definierten Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind und  $p(\cdot)$  der in 6.11 eingeführte Gauge-Operator. Die Indikatorfunktion  $\mathbf{1}_I$  ist dabei sowohl als Element des  $L^2(\mathbb{R}_+)$  als auch als Operator  $f(x) \mapsto \mathbf{1}_I \cdot f(x)$  auf dem  $L^2(\mathbb{R}_+)$  zu verstehen.

Für ein reelles  $\lambda$  definiert man nun den Operator

$$p_I(\xi, T, \lambda) := a_I(\xi) + a_I^*(\xi) + p_I(T) + |I|\lambda \quad (6.4)$$

und  $a_t, a_t^*, p_t$  als die jeweiligen Spezialfälle für  $I = [0, t]$ . Die Abbildung  $I \mapsto p_I(\xi, T, \lambda)$  wird dann  $q$ -Lévy-Prozess genannt. Ein durch  $t \in \mathbb{R}_+$  indizierter Prozess ist durch die Vorschrift  $t \mapsto p_t(\xi, T, \lambda)$  gegeben. Man sieht, dass ein  $q$ -Lévy-Prozess aus drei Komponenten besteht, wobei die erste der bekannte Positionsoperator mit  $q$ -Gauß'scher Verteilung ist. Hinzugefügt werden ein durch den Operator  $T$  bestimmter Anteil, der dem Sprunganteil des klassischen Lévy-Prozesses entspricht, sowie ein Drift-Term  $|I|\lambda$ .

Für die multi-dimensionale Erweiterung solcher Prozesse fixiert man eine Familie  $\{T_j : 1 \leq j \leq k\}$  essentiell selbstadjungierter Operatoren auf einem gemeinsamem Definitionsbereich  $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{V}$ , derart, dass  $T_j(\mathcal{D}) \subseteq \mathcal{D}$  für alle  $j$  gilt. Zusätzlich wählt man Familien  $\{\xi_j : 1 \leq j \leq k\}$  und  $\{\lambda_j : 1 \leq j \leq k\}$ , die die Zusatzvoraussetzungen

- (a) Für alle  $i, j \in \{1, \dots, k\}$ ,  $l \in \mathbb{N}$  und  $\vec{u} \in \{1, \dots, k\}^l$  ist

$$\mathbb{T}_{\vec{u}} \xi_i := T_{u(1)} T_{u(2)} \cdots T_{u(l)} \xi$$

ein für  $T_j$  analytischer Vektor. Hierbei wird  $\vec{u}$  ein *Multiindex* genannt.

- (b) Der Definitionsbereich  $\mathcal{D}$  ist der lineare Aufspann der Menge

$$\{\mathbb{T}_{\vec{u}} \xi_i : i \in \{1, \dots, k\}, l \in \mathbb{N}, \vec{u} \in \{1, \dots, k\}^l\} .$$

erfüllen. Analog zur obigen Vorgehensweise setzt man  $X^{(j)}(I) := p_I(\xi_j, T_j, \lambda_j)$  und definiert  $\mathbb{X}$  durch

$$\mathbb{X} := (X^{(1)}, \dots, X^{(k)})$$

als den *multi-dimensionalen*  $q$ -Lévy-Prozess (*multiple  $q$ -Lévy process*). Wie üblich setzt man  $\mathbb{X}(t) := \mathbb{X}([0, t])$ .

**Bemerkung 6.13** ( $q$ -Brown'sche Bewegung als Spezialfall)

In Bemerkung 6.1 hatten wir bereits die Konstruktion einer verallgemeinerten  $q$ -Brown'schen Bewegung gesehen. Diesen Prozess erhalten wir unter anderem als Spezialfall des  $q$ -Lévy-Prozesses zurück. Dazu setzt man  $\mathcal{V} := \mathbb{C}$  und betrachtet wegen  $A \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C} \cong A$  den  $q$ -Fockraum über  $L^2(\mathbb{R}_+, dx)$ . Der Operator  $T$  wird als  $T = 0$  gesetzt,  $\lambda = 0$  definiert und  $\xi$  kann beliebig, z.B. als  $\xi = 1$ , gewählt werden. Dann gilt

$$X(t) = p_{[0,t)}(1, 0, 0) = a_{[0,t)}(1) + a_{[0,t)}^*(1) + p_{[0,t)}(0) + t \cdot 0 = w(\mathbb{1}_{[0,t)})$$

und wir erhalten so wegen  $\mathbb{E}[X(s)X(t)] = \langle \mathbb{1}_{[0,s)} | \mathbb{1}_{[0,s)} \rangle = \min(s, t)$  den bereits bekannten Prozessstyp zurück.

**Definition 6.14** (Polynomialalgebren und Funktionale)

Betrachte  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbb{C}\langle x_1, \dots, x_k \rangle$  die Polynomialalgebra in  $k$  nichtkommutativen Variablen. Bezeichne mit  $\delta_0(P)$  den *konstanten Term* eines Polynoms  $P \in \mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$  und definiere

$$\mathbb{C}_0\langle \mathbf{x} \rangle := \{P \in \mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle : \delta_0(P) = 0\}$$

als den Unterraum der Polynome mit verschwindendem konstanten Term. Sei nun  $\Psi : \mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle \rightarrow \mathbb{C}$  ein lineares Funktional. Man nennt  $\Psi$  *bedingt positiv*, wenn das eingeschränkte Funktional  $\Psi|_{\mathbb{C}_0\langle \mathbf{x} \rangle}$  positiv ist. Dabei ist  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$  mit der Konjugationsoperation auszustatten, die die Konjugation aus  $\mathbb{C}$  erweitert und für die zusätzlich  $x_i = x_i^*$  (für alle  $1 \leq i \leq k$ ) gilt. Positivität eines linearen Funktionals  $\Phi$  auf  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$  meint in diesem Kontext  $\Phi(ff^*) \geq 0$  für alle  $f \in \mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$ . Derartige  $\Phi$  werden verwendet, um durch  $\langle f | g \rangle_{\Phi} := \Phi(fg^*)$  positiv semidefinite Skalarprodukte zu konstruieren.

Für den nächsten Begriff verwenden wir erneut die Multiindex-Notation aus Definition 6.12 (a). Wir nennen das Funktional  $\Psi$  *analytisch*, wenn für alle  $i \in \{1, \dots, k\}$  und alle Multiindizes  $\vec{u}$  die Bedingung

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \Psi[(\mathbf{x}_{\vec{u}})^* x_i^{2n} \mathbf{x}_{\vec{u}}]^{1/2n} < \infty$$

erfüllt ist. Derartige Funktionale werden eine Rolle bei der Einführung des Begriffes der *unendlichen Teilbarkeit* im Kontext der  $q$ -Lévy-Prozesse spielen. Insbesondere wird die Abbildung  $\log_q(\cdot)$  wichtig sein:

Ist erneut  $\Phi$  ein beliebiges Funktional auf  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$ , so definiert man  $\Psi := \log_q(\Phi)$  durch die folgende rekursive Abbildungsvorschrift

$$\Psi(\mathbf{x}_{\vec{u}}) = \Phi(\mathbf{x}_{\vec{u}}) - \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(n) \\ \pi \neq \hat{1}}} q^{rc(\pi)} \prod_{B \in \pi} \Psi(\mathbf{x}_{(B:\vec{u})})$$

auf Monomen ( $\vec{u}$  ein Multiindex) mit Grad  $n$  und erweitert danach linear. Dabei war  $\hat{1}$  das größte Element einer Mengenpartition bzgl. der Verfeinerungsordnung (siehe Definition 2.5).

**Definition 6.15** ( $q$ -Faltung nach Anshelevich)

Wir merken einsteigend an, dass für diesen Faltungsbegriff eine Bemerkung in der Einleitung von [Ora05] von Interesse ist. Dort wird angemerkt, dass das Gegenbeispiel über die  $q$ -Poissonkonstruktion zwar für Nicas  $q$ -Faltung funktioniert, aber mit der nun zu betrachtenden Faltung keine Probleme auftreten. Dort kann tatsächlich eine  $q$ -Poissonverteilung als W-Maß realisiert

werden.

Auf  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle$ , der Polynomialgebra in  $k$  nichtkommutativen Variablen, wie in Bemerkung 6.8 eingeführt, wird ein lineares Funktion  $M$  durch die Bedingungen

$$(i) \quad M(1, t, \mathbb{X}) = 1$$

$$(ii) \quad M(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X}) = \mathbb{E}[\mathbb{X}^{(\vec{u})}(t)]$$

definiert, wobei für  $\vec{u} \in \{1, \dots, k\}^l$  die Multiindex-Notation

$$\mathbf{x}_{\vec{u}} = x_{u(1)} \cdots x_{u(l)}, \quad \mathbb{X}^{(\vec{u})}(t) = X^{(u(1))}(t) \cdots X^{(u(l))}(t)$$

verwendet wird. Das  $\mathbb{X}$  ist dabei ein multi-dimensionaler  $q$ -Lévy-Prozess und  $t$  ein Parameter aus dem jeweiligen Zeitintervall. Die Abbildung  $M(\cdot, t, \mathbb{X})$  wird das *Momentenfunktional* des Prozesses  $\mathbb{X}$  zum Zeitpunkt  $t$  genannt. Die *kombinatorischen Momente* von  $\mathbb{X}$  zum Zeitpunkt  $t$  erhält man, indem eine Partition  $\pi \in \mathcal{P}(n)$  fixiert und für ein Monom  $\mathbf{x}_{\vec{u}}$  das Produkt über die Blöcke

$$M_{\pi}(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X}) := \prod_{B \in \pi} M(\mathbf{x}_{(B:\vec{u})}, t, \mathbb{X})$$

betrachtet wird. Dabei ist  $\mathbf{x}_{(B:\vec{u})}$  durch das Produkt  $x_{u(i(1))} x_{u(i(2))} \cdots x_{u(i(s))}$  definiert, wobei der Block  $B$  die Gestalt  $B = (i(1), i(2), \dots, i(s))$  ( $s = |B|$ ) mit aufsteigend sortierten Einträgen besitzt.

Falls  $\mathbb{X} = X$  ein eindimensionaler Prozess ist, kann  $M(\cdot, t, \mathbb{X})$  zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß  $\mu_t$  erweitert werden, derart dass

$$\mu_t(x^n) = M(x^n, t, \mathbb{X}) \tag{6.5}$$

gilt. Insbesondere gilt dann  $\mu_t(A) = \mathbb{E}[T(A)]$ , wobei  $T$  das PVM (siehe Definition 5.18 und Bemerkung 5.19) des Operators  $X(t)$  ist.

Mit Hilfe des kombinatorischen Zugangs zur Theorie der stochastischen Integration (siehe [RW97]) werden nun zu  $M$  bzw.  $M_{\pi}$  zugehörige Funktionale  $R$ , das Kumulantenfunktional, bzw.  $R_{\pi}$ , die kombinatorischen Kumulanten, definiert. Es gilt die Beziehung

$$M(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(n)} R_{\pi}(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X})$$

zwischen Momentenfunktional und Kumulanten ( $n$  ist der Grad von  $\mathbf{x}_{\vec{u}}$ ), sowie

$$R_{\pi}(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X}) = q^{rc(\pi)} \prod_{B \in \pi} R(\mathbf{x}_{(B:\vec{u})}, t, \mathbb{X})$$

zwischen Kumulanten und Kumulantenfunktional (siehe [Ans01, Theorem 3.8]). Das Kumulantenfunktional ausgewertet an einem Monom  $\mathbf{x}_{\vec{u}}$  läßt sich sogar explizit als

$$R(\mathbf{x}_{\vec{u}}, t, \mathbb{X}) = \begin{cases} t\lambda_{u(1)} & : n = 1 \\ t \left\langle \xi_{u(1)} \middle| \prod_{j=2}^{n-1} T_{u(j)} \xi_{u(n)} \right\rangle & : n \geq 2 \end{cases} \tag{6.6}$$

angeben (siehe [Ans01, Proposition 3.6]), wobei  $\lambda_j$ ,  $\xi_j$  und  $T_j$  die Komponenten des  $q$ -Lévy-Prozesses  $\mathbb{X}$  sind (siehe Definition 6.12). Mit

$$R(f, \mathbb{X}) := R(f, 1, \mathbb{X}),$$

d.h. dem Kumulantenfunktional zum Zeitpunkt  $t = 1$ , kann man nun wegen

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} M(f, t, \mathbb{X}) = R(f, \mathbb{X}) \quad (6.7)$$

das Funktional  $R(\cdot, \mathbb{X})$  als Erzeuger der Familie  $M(\cdot, t, \mathbb{X})$  von Momentenfunktionalen auffassen (siehe [Ans01, Lemma 4.1]). Damit wird anschließend gezeigt, dass ein Funktional  $\Psi$  genau dann Erzeuger eines Momentenfunktional für einen multi-dimensionalen  $q$ -Lévy-Prozess ist, wenn dieses  $\Psi$  die Eigenschaften *analytisch* und *bedingt positiv* aus Definition 6.14 besitzt. Das  $k$ , die Dimension des resultierenden Prozesses, wird durch die Anzahl der Unbekannten  $x_j$  der Polynomialgebra bestimmt. Für  $\mathbb{C}\langle \mathbf{x} \rangle = \mathbb{C}[x]$  erhält man damit eindimensionale Prozesse, d.h. Operatoren der Form (6.4).

Weiterhin stehen für jeden  $q$ -Lévy-Prozess  $\mathbb{X}$  das Momenten- und Kumulantenfunktional durch die Abbildung  $\log_q$  aus Definition 6.14 in folgendem Zusammenhang:

$$R(\cdot, t, \mathbb{X}) = \log_q M(\cdot, t, \mathbb{X}), \quad M(\cdot, t, \mathbb{X}) = \exp_q(tR(\cdot, \mathbb{X}))$$

Dabei ist die Notation  $\exp_q$  als die zu  $\log_q$  *inverse Abbildung* durch das Ergebnis aus (6.7) motiviert. Mit diesem Wissen kann nun die Menge der *kombinatorisch unendlich teilbaren* Funktionale als

$$\begin{aligned} \mathcal{TD}_c(q, k) &:= \{ \Phi : \Phi = M(\cdot, 1, \mathbb{X}) \text{ für einen } k\text{-dim. } q\text{-Lévy-Prozess } \mathbb{X} \} \\ &= \{ \Phi : \log_q(\Phi) \text{ ist ein } \textit{bedingt positives} \text{ und } \textit{analytisches} \text{ Funktional} \} \end{aligned}$$

definiert werden. Der gesuchte Begriff der *q-unendlichen Teilbarkeit* wird sich nachher als Spezialfall dieser Menge für  $k = 1$  ergeben.

In [Ans01, Abschnitt 6, Single-Variable Variables] geht man letztendlich auf diesen Fall  $k = 1$  über, betrachtet also eindimensionale  $q$ -Lévy-Prozesse. Wie in [Nic95] beschränkt man sich auf endliche positive Borelmaße auf  $\mathbb{R}$  mit endlichen Momenten. Die Klasse dieser Maße wird mit  $\mathcal{M}_c$  bezeichnet,  $\mathcal{M}_c^1 \subseteq \mathcal{M}_c$  sollen die jeweiligen Wahrscheinlichkeitsmaße sein. Dadurch kann erneut  $\mu \in \mathcal{M}_c$  mit einem Funktional auf  $\mathbb{C}[x]$  durch die Vorschrift  $\mu(x^n) \leftrightarrow m_n(\mu)$  ( $m_n(\mu)$  die Momente des Maßes) identifiziert werden.

Zu einem solchen Maß  $\mu$  wird nun die Folge der  $q$ -Kumulanten durch  $r_n(\mu) := (\log_q \mu)(x^n)$  (siehe 6.14 für die allgemeine Definition von  $\log_q(\cdot)$ ), d.h.

$$r_n(\mu) = m_n(\mu) - \sum_{\substack{\pi \in \mathcal{P}(n) \\ \pi \neq \hat{1}}} q^{rc(\pi)} \prod_{B \in \pi} r_{|B|}(\mu) \quad (6.8)$$

bestimmt. Da nur über diejenigen  $\pi \in \mathcal{P}(n)$  mit  $\pi \neq \hat{1}$  summiert wird, gilt stets  $|B| < n$  und so stellt (6.8) tatsächlich eine rekursive Vorschrift dar. Man beachte außerdem die Ähnlichkeit zur Momenten-Kumulanten-Formel (6.3) aus Definition 6.9, bemerke aber die unterschiedliche Art die Kreuzungen der Partionen, über die summiert wird, zu zählen.

Diese  $q$ -Kumulanten sind zwar für alle  $\mu \in \mathcal{M}_c^1$  wohldefiniert, aber die Ergebnisse über Momenten- und Kumulantenfunktionale sowie die Theorie der  $q$ -Lévy-Prozesse lässt sich nur auf eine kleinere Klasse von Maßen anwenden:

Dazu betrachtet man eine Folge  $\mathbf{r} := \{r_i\}_{i \geq 0}$  reeller Zahlen ( $r_0 = 0$ ) und definiert durch die Vorschrift  $x^i \mapsto r_i$  (und lineare Erweiterung) das Funktional  $\psi_{\mathbf{r}}$  auf  $\mathbb{C}[x]$ , welches genau dann analytisch (siehe 6.14) ist, wenn  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} r_{2n}^{\frac{1}{2n}} < \infty$  gilt. Bedingte Positivität ist genau dann gegeben, wenn das durch  $x^i \mapsto r_{i+2}$  definierte Funktional positiv ist. Damit folgt nun, dass die Folge  $\{r_i\}_{i \geq 2}$  durch die Momente eines Maßes  $\tau \in \mathcal{M}_c$  gegeben ist, d.h.  $r_{n+2} = m_n(\tau)$  für  $n \in \mathbb{N}_0$ , wobei dieses  $\tau$  eindeutig durch seine Momente charakterisiert ist. Die Menge dieser Maße aus  $\mathcal{M}_c$ , die diese Eigenschaft, also

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} m_{2n}(\tau)^{\frac{1}{2n}} < \infty$$

erfüllen, wird mit  $\mathcal{M}_u$  bezeichnet.

Sei nun ein solches  $\tau \in \mathcal{M}_u$  sowie  $\lambda \in \mathbb{R}$  gegeben. Definiere die Kumulantenfolge  $\{r_i\}_{i \geq 0}$  durch  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = \lambda$  und  $r_n = m_{n-2}(\tau)$  für alle  $n \geq 2$ . Auf diese Folge wendet man nun die Momenten-Kumulanten-Formel (6.8) an und erhält wegen der Bijektion zwischen Momentenfunktionalen und Funktionalen, die bedingt positiv und analytisch sind, ein Wahrscheinlichkeitsmaß (siehe Gleichung (6.5)) aus  $\mathcal{M}_c^1$ , welches mit  $\text{LH}_q^{-1}(\lambda, \tau)$  bezeichnet wird. Die Theorie der  $q$ -Lévy-Prozesse geht also insbesondere bei der Fragestellung ein, ob die Umwandlung der  $q$ -Kumulanten in Momente letztendlich ein sinnvolles Objekt liefert.

Wegen  $r_1 = m_1(\mathcal{P}(1))$  besteht nur aus dem Element  $\hat{1}$  ist durch  $\lambda$  gerade das erste Moment bestimmt. Insbesondere liegt  $\text{LH}_q^{-1}(\lambda, \tau)$  sogar in  $\mathcal{M}_u^1$  und kann weiterhin folgendermaßen charakterisiert werden:

Sei  $\xi$  ein normierter Vektor und  $T$  ein Operator, der bezüglich des Zustandes  $A \mapsto \langle \xi | A \xi \rangle$  die Verteilung  $\tau$  besitzt. Dann ist  $\text{LH}_q^{-1}(\lambda, \tau)$  gerade die Verteilung des  $q$ -Lévy-Prozesses  $p_t(\xi, T, \lambda)$  zum Zeitpunkt  $t = 1$ . Dieser Interpretation ist eine direkte Folgerung aus der Gleichung (6.6).

Für  $q = 1$  sowie  $q = 0$  sind  $\lambda$  und  $\tau$  gerade die Parameter der jeweiligen *Lévy-Khinchin* Darstellungen eines Wahrscheinlichkeitsmaßes (siehe [Ans01, Lemma 6.5]). Ist

$$\log \mathcal{F}(\mu_1)(\omega) = i\gamma\omega + \int_{\mathbb{R}} \left( \exp(i\omega x) - 1 - \frac{i\omega x}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\sigma(x)$$

die klassische Darstellung eines Maßes  $\mu_1$ , und

$$\mathcal{R}(\mu_0)(\omega) = \gamma + \int_{\mathbb{R}} d\sigma(x)$$

die freie Darstellung ( $\mathcal{R}$  die  $\mathcal{R}$ -Transformierte, die wir bereits in Definition 6.9 betrachtet hatten) eines Maßes  $\mu_0$ , so gilt  $\text{LH}_1^{-1}(\lambda, \tau) = \mu_1$  bzw.  $\text{LH}_0^{-1}(\lambda, \tau) = \mu_0$  mit

$$d\sigma(x) = \frac{1}{1+x^2} d\tau(x) \quad \text{und} \quad \gamma = \lambda - m_1(\sigma).$$

Die Menge  $\mathcal{ID}_c(q)$  wird schließlich als das Bild der offensichtlich injektiven Abbildung  $\text{LH}_q^{-1}$  definiert. Es stellt sich heraus, dass in der Tat  $\mathcal{ID}_c(q) = \mathcal{ID}_c(q, 1)$  gilt, die Menge der betrachteten Maße also gerade ein Spezialfall der untersuchten Familie von Momentenfunktionalen für  $q$ -Lévy-Prozesse ist. Die zugehörige Umkehrabbildung  $\text{LH}_q : \mathcal{ID}_c(q) \rightarrow \mathbb{R} \times \mathcal{M}_u$  wird nun verwendet, um die  $q$ -Faltung  $\boxplus_q$  von  $\mu, \nu \in \mathcal{ID}_c(q)$  durch die Bedingung

$$\text{LH}_q(\mu \boxplus_q \nu) = \text{LH}_q(\mu) + \text{LH}_q(\nu)$$

zu definieren. Die Positivität des Operators auf  $\mathcal{ID}_c(q)$  folgt dann einfach durch die Tatsache, dass die Summe zweier Maße aus  $\mathcal{M}_u$  wieder in  $\mathcal{M}_u$  liegt. Man sieht hier, dass ähnlich wie bei der Definition der Nica-Faltung (siehe 6.9) zuerst der linearisierende Operator (in diesem Fall  $\text{LH}_q$ ) definiert wird, um danach über diesen die jeweilige Faltung zu erklären.

Während also bei Nicas Definition der  $q$ -Faltung der *gutartige* Definitionsbereich, also auf dem die Faltung positiv operiert, unklar ist, wird dieser in [Ans01] direkt mitkonstruiert. Allerdings ist man auch dort auf die Maße beschränkt, die die Eigenschaft „ $q$ -unendlich teilbar“ erfüllen. Eine Erweiterung dieser Konstruktion auf die Klasse aller Wahrscheinlichkeitsmaße mit endlichen Momenten, wie sie in [Nic95] als Ausgangsobjekt betrachtet werden, wird in [Ans01, Abschnitt 6.1] jedoch klar ausgeschlossen und auch begründet.

Eine ähnliche Aussage, die ebenfalls eine negative Aussage über die allgemeine Existenz von  $q$ -Faltungen macht, findet man in [LM96].

**Bemerkung 6.16** (Unmöglichkeit der  $q$ -Faltung unter Annahme von  $q$ -Unabhängigkeit)

In der Arbeit [LM96] wird gezeigt, dass die Verteilung der Summe von zwei  $q$ -unabhängigen (verallgemeinerten) Zufallsvariablen  $X_1$  und  $X_2$  nicht allein von den jeweiligen Verteilungen abhängt. Die Existenz einer allgemeinen  $q$ -Faltung würde aber genau dieses implizieren:

Die Zufallsvariablen, die in diesem Kontext verwendet werden, sind die bekannten Positionsooperatoren auf dem  $q$ -Fockraum mit  $q$ -Gauß'scher Verteilung. Sind  $X_1 := w(f_1)$  und  $X_2 := w(f_2)$  mit  $f_1 \perp f_2$  und  $\|f_i\| = 1$  ( $i = 1, 2$ ) gesetzt, so genügen diese Zufallsvariablen dem Unabhängigkeitsbegriff aus der Quantenwahrscheinlichkeitstheorie (siehe [BS91, Abschnitt 1]).

Dies bedeutet

$$\mathbb{E}[f(X_1)g(X_2)] = \mathbb{E}[g(X_2)f(X_1)] = \mathbb{E}[f(X_1)]\mathbb{E}[g(X_2)] \quad (*)$$

für alle beschränkten und meßbaren Funktionen  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  im Sinne des Spektralkalküls.

Die Idee ist nun, eine solche Funktion  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zu konstruieren, derart, dass  $X_1$  und  $\gamma(X_1)$  identisch verteilt sind, aber die Zufallsvariablen  $X_1 + X_2$  und  $\gamma(X_1) + X_2$  *nicht* dieselbe Verteilung besitzen (siehe [LM96, Theorem 1]). Da  $X_1$  und  $X_2$  als *quantenunabhängig* im Sinne der Gleichung (\*) gewählt worden sind, bleiben natürlich auch  $\gamma(X_1)$  und  $X_2$  quantenunabhängig (wähle  $f := \mathbf{1}$  und  $g := \gamma$ ), sodass sich die Summe  $\gamma(X_1) + X_2$  linear unter Faltung verhält.

Eine allgemeine  $q$ -Faltung kann also nicht existieren, denn wäre  $\boxplus_q$  eine solche Operation, so würde

$$\mathcal{L}(X_1 + X_2) = \mathcal{L}(X_1) \boxplus_q \mathcal{L}(X_2) = \mathcal{L}(\gamma(X_1)) \boxplus_q \mathcal{L}(X_2) = \mathcal{L}(\gamma(X_1) + X_2)$$

gelten, wobei  $\mathcal{L}(\cdot)$  als die Verteilung des jeweiligen Operators definiert sein soll. Aber

$$\mathcal{L}(X_1 + X_2) \neq \mathcal{L}(\gamma(X_1) + X_2)$$

nach dem eben zitierten Theorem.

Für die Konstruktion von  $\gamma$  wird der in [LM95] konstruierte unitäre Operator

$$U : \mathfrak{F}_q(\mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \nu_q(dx))$$

verwendet, wobei  $\nu_q(dx)$  das in 5.4 definierte  $q$ -Spektralmaß ist. Das  $U$  war in [LM95] als derjenige Operator konstruiert worden, der  $X := w(1)$  diagonalisiert, d.h. für den  $UX = TU$  gilt, mit

$$(Tf)(x) := x \cdot f(x) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}, \nu_q(dx))$$



dem kanonischen (punktweisen) Multiplikationsoperator. Der Operator erfüllt darüber hinaus  $U(\Omega) = \mathbf{1}$ . Die Abbildung  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  wird nun als diejenige Transformation des Intervalls  $[-\frac{2}{\sqrt{1-q}}, \frac{2}{\sqrt{1-q}}]$  gewählt, die die Verteilung  $\nu_q(dx)$  erhält (eine Darstellung findet man in [LM96, Figure 1]). Man konstruiert im Folgenden sukzessiv Operatoren, die die Operation von  $\gamma$  auf dem jeweiligen Raum implementieren. Zuerst betrachtet man  $\widehat{W}$ , den unitären Operator der dieses auf  $L^2(\mathbb{R}, \nu_q(dx))$  leistet. Unter Verwendung des oben angesprochenen Operators  $U$  wird durch

$$\widetilde{W} := U^* \widehat{W} U$$

die Transformation von  $\gamma$  auf  $\mathfrak{F}_q(\mathbb{C})$  übertragen, d.h.  $\gamma(X) = \widetilde{W} X \widetilde{W}$  mit  $\widetilde{W}(\Omega) = \Omega$ .

An dieser Stelle geht man auf  $\mathcal{H} := \mathbb{C}^2$  über und wählt  $f_1 := (1, 0)$  sowie  $f_2 := (0, 1)$  orthogonale Elemente. Mit Hilfe eines Isomorphismus

$$V : \mathfrak{F}_q(\mathbb{C}) \otimes \mathcal{K} \rightarrow \mathfrak{F}_q(\mathcal{H}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{K} := \text{Kern}(a(f_1)) \subseteq \mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$$

erweitert man  $\widetilde{W}$  letztmalig durch

$$W := V(\widetilde{W} \otimes \mathbf{1})V^*$$

auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{K}$  und  $\{e_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  die kanonische Basis von  $\mathfrak{F}_q(\mathbb{C})$  (wir hatten im Beispiel 3.25 bereits die einfache Struktur dieses Raumes untersucht), so ist die Abbildungsvorschrift des Isomorphismus explizit durch

$$V(e_k \otimes \varphi) := (a^*(f_1))^k \varphi$$

gegeben. Mit diesem unitären und selbstadjungierten  $W$ , welches die Aktion von  $\gamma$  auf  $\mathfrak{F}_q(\mathcal{H})$  implementiert, ist es nun möglich

$$\mathbb{E}[(X_1 + X_2)^4] > \mathbb{E}[(\gamma(X_1) + X_2)^4]$$

für alle  $q \in (0, 1)$  zu zeigen. Da also die vierten Momente der Operatoren voneinander abweichen, können die zugehörigen Verteilungen nicht übereinstimmen. Wie zu erwarten, schlägt dieser Ansatz für die Randwerte  $q \in \{0, 1\}$  fehl. Dort stimmen die Momente tatsächlich überein.



## 7 Fazit

Wie wir bereits in der Einleitung betont hatten, ist man also von einer formalen Definition einer  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie noch weit entfernt.

Probleme gibt es bereits bei grundlegenden Begriffen, wie z.B. der Unabhängigkeit. Von einer robusten Theorie würde man erwarten, dass charakteristische Eigenschaften aus der klassischen und der freien Theorie, wie das Verhalten der Summe zweier Zufallsgrößen unter Konvolution, erhalten bleiben. Die aktuellen Ergebnisse scheinen jedoch eher anzudeuten, dass man bei einer Verallgemeinerung von derartig *starken* Eigenschaften Abstand nehmen muss.

Damit verbunden ist das Problem der Kreuzungsstatistiken für Mengenpartitionen. Das Zählen der Kreuzungen einer Partition scheint ein wesentlicher Bestandteil jeder Konstruktion zu sein, die auf eine Konvolution hinarbeitet. Dabei bleibt jedoch weiterhin unklar, welche Statistik die korrekte Art des Zählens darstellt (uns sind im Verlaufe insgesamt drei Arten begegnet) und ob nicht möglicherweise andere Kreuzungsstatistiken existieren, die einen besseren Konvolutionsoperator liefern.

Desweiteren sind momentan nur grundsätzlich zwei Typen von Zufallsvariablen bekannt, die wir allgemein als selbstadjungierte Operatoren erklärt hatten. Dies sind auf der einen Seite die  $q$ -Gauß'schen Größen, die wir analog zu den Positionoperatoren aus der Quantenmechanik konstruiert hatten, und auf der anderen Seite die Größen, die als Gauge-Operator aus einem Operator auf dem zugrundeliegenden Raum  $\mathcal{H}$  hervorgehen. Der Gauge-Operator war für die Definition von  $q$ -Lévy-Prozessen zum Einsatz gekommen.

Eine ähnliche Aussage gilt damit auch für die stochastischen Prozesstypen. Es existiert hier die Klasse der  $q$ -Gauß-Prozesse, d.h. man betrachtet Abbildungen  $t \mapsto X_t$  mit einer Familie  $\{X_t\}_t$  von  $q$ -Gauß'schen Zufallsvariablen, sowie die erweiterte Klasse der  $q$ -Lévy-Prozesse. Auch waren wir in Bemerkung 6.1 den Markov-Prozessen aus [BKS97] begegnet. Dabei konnte hierbei für  $q$ -Gauß-Prozesse die Markoveigenschaft auf die Beschaffenheit des zugrundeliegenden Raumes  $\mathcal{H}$  zurückgeführt werden.

Es ist zu vermuten, dass noch weitere Prozesstypen existieren, die es sich zu untersuchen lohnt.

Dem bereits bekannten Wissen über den Fockraum, die Gauß'schen Zufallsvariablen, das Spektralmaß sowie die derzeit untersuchten Konvolutionsoperatoren stehen somit ebensoviele neue Fragen gegenüber, wie auf dem Weg zu einer  $q$ -Wahrscheinlichkeitstheorie weiter zu verfahren ist.

Man steht also weiterhin am Anfang einer derartigen Theorie und auch wenn vieles darauf hindeutet, ist noch nicht abschließend klar, ob und in welcher Form diese wirklich existiert. Es bleibt dennoch zu hoffen, dass diese Arbeit den Anspruch ihres Titels, also einen ersten *Einblick* in dieses weitläufige Gebiet zu geben, erfüllt hat.



# Literaturverzeichnis

- [AI84] ASKEY, Richard ; ISMAIL, Mourad: Recurrence relations, continued fractions, and orthogonal polynomials. In: *Mem. Amer. Math. Soc.* 49 (1984), Nr. 300, S. iv+108. – ISSN 0065–9266
- [Ans01] ANSHELEVICH, Michael: Partition-dependent stochastic measures and  $q$ -deformed cumulants. In: *Doc. Math.* 6 (2001), 343–384 (electronic). <http://www.math.uiuc.edu/documenta/vol-06/14.pdf>. – ISSN 1431–0635
- [Ans04] ANSHELEVICH, Michael:  $q$ -Lévy processes. In: *J. Reine Angew. Math.* 576 (2004), 181–207. <http://dx.doi.org/10.1515/crll.2004.088>. – DOI 10.1515/crll.2004.088. – ISSN 0075–4102
- [Apo76] APOSTOL, Tom M.: *Introduction to analytic number theory*. New York : Springer-Verlag, 1976. – xii+338 S. – Undergraduate Texts in Mathematics
- [AS64] ABRAMOWITZ, Milton ; STEGUN, Irene A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Ninth Dover printing, Tenth GPO printing. New York : Dover, 1964 <http://www.math.ucla.edu/~cbm/aands/>. – ISBN 0–486–61272–4
- [ASC76] AL-SALAM, W. A. ; CHIHARA, T. S.: Convolutions of Orthonormal Polynomials. In: *SIAM Journal on Mathematical Analysis* 7 (1976), Nr. 1, 16–28. <http://dx.doi.org/10.1137/0507003>. – DOI 10.1137/0507003
- [ATBL10] ANSHELEVICH, M. ; TEODOR BELINSCHI, S. ; BOZEJKO, M. ; LEHNER, F.: Free Infinite Divisibility for  $Q$ -Gaussians. In: *ArXiv e-prints* (2010), March. <http://arxiv.org/abs/1003.0935>
- [BI82] BUSTOZ, Joaquin ; ISMAIL, Mourad E. H.: The associated ultraspherical polynomials and their  $q$ -analogues. In: *Canad. J. Math.* 34 (1982), Nr. 3, 718–736. <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1982-049-6>. – DOI 10.4153/CJM–1982–049–6. – ISSN 0008–414X
- [BI96] BERG, Christian ; ISMAIL, Mourad E. H.:  $q$ -Hermite polynomials and classical orthogonal polynomials. In: *Canad. J. Math.* 48 (1996), Nr. 1, 43–63. <http://dx.doi.org/10.4153/CJM-1996-002-4>. – DOI 10.4153/CJM–1996–002–4. – ISSN 0008–414X
- [Bia97] BIANE, Philippe: Some properties of crossings and partitions. In: *Discrete Math.* 175 (1997), Nr. 1–3, 41–53. [http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X\(96\)00139-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0012-365X(96)00139-2). – DOI 10.1016/S0012–365X(96)00139–2. – ISSN 0012–365X
- [BKS97] BOŻEJKO, Marek ; KÜMMERER, Burkhard ; SPEICHER, Roland:  $q$ -Gaussian processes: non-commutative and classical aspects. In: *Comm. Math. Phys.* 185

- (1997), Nr. 1, 129–154. <http://dx.doi.org/10.1007/s002200050084>. – DOI 10.1007/s002200050084. – ISSN 0010–3616
- [Bru70] BRUIJN, Nicolaas Govert d.: *Asymptotic methods in analysis*. North-Holland Publ. Co. [u.a.], 1970 (Bibliotheca mathematica ; 4). – XII, 200 S.
- [BS91] BOŹEJKO, Marek ; SPEICHER, Roland: An example of a generalized Brownian motion. In: *Comm. Math. Phys.* 137 (1991), Nr. 3, 519–531. <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.cmp/1104202738>. – ISSN 0010–3616
- [BS92] BOŹEJKO, Marek ; SPEICHER, Roland: An example of a generalized Brownian motion. II. In: *Quantum probability & related topics*. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1992 (QP-PQ, VII), S. 67–77
- [BS94] BOŹEJKO, Marek ; SPEICHER, Roland: Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces. In: *Math. Ann.* 300 (1994), Nr. 1, 97–120. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01450478>. – DOI 10.1007/BF01450478. – ISSN 0025–5831
- [BY06] BOŹEJKO, Marek ; YOSHIDA, Hiroaki: Generalized  $q$ -deformed Gaussian random variables. In: *Quantum probability* Bd. 73. Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw, 2006, S. 127–140
- [Dei05] DEITMAR, Anton: *A first course in harmonic analysis*. Second. New York : Springer-Verlag, 2005 (Universitext). – xii+192 S. – ISBN 0–387–22837–3
- [Dur96] DURRETT, Richard: *Probability: Theory and Examples*. Second. Belmont, CA : Duxbury Press, 1996. – xiii+503 S. – ISBN 0–534–24318–5
- [EP03] EFFROS, Edward G. ; POPA, Mihai: Feynman diagrams and Wick products associated with  $q$ -Fock space. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* 100 (2003), Nr. 15, 8629–8633 (electronic). <http://dx.doi.org/10.1073/pnas.1531460100>. – DOI 10.1073/pnas.1531460100. – ISSN 1091–6490
- [GHW09] GREENBERGER, Daniel ; HENTSCHEL, Klaus ; WEINERT, Friedel: *Compendium of Quantum Physics*. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2009. – XVI, 901 S. : Ill., graph. Darst.. – ISBN 978–3–540–70622–9, 3–540–70622–4. – Concepts, Experiments, History and Philosophy
- [Gre91] GREENBERG, O. W.: Particles with small violations of Fermi or Bose statistics. In: *Phys. Rev. D (3)* 43 (1991), Nr. 12, 4111–4120. <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.43.4111>. – DOI 10.1103/PhysRevD.43.4111. – ISSN 0556–2821
- [Gri05] GRIFFITHS, David J.: *Introduction to Quantum Mechanics*. Upper Saddle River, NJ : Pearson Prentice Hall, 2005. – IX, 468 S. : Ill., graph. Darst.. – ISBN 0–13–191175–9, 978–0–13–191175–8
- [KR97a] KADISON, Richard V. ; RINGROSE, John R.: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 15: *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. I*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997. – xvi+398 S. – ISBN 0–8218–0819–2. – Elementary theory, Reprint of the 1983 original

- [KR97b] KADISON, Richard V. ; RINGROSE, John R.: *Graduate Studies in Mathematics*. Bd. 16: *Fundamentals of the theory of operator algebras. Vol. II*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1997. – i–xxii and 399–1074 S. – ISBN 0–8218–0820–6. – Advanced theory, Corrected reprint of the 1986 original
- [Kö04] KÖNIGSBERGER, Konrad: *Analysis. 1*. Sixth. Berlin : Springer-Verlag, 2004 (Springer-Lehrbuch. [Springer Textbook]). – xiv+412 S. – ISBN 3–540–40371–X
- [LM95] LEEUWEN, Hans van ; MAASSEN, Hans: A  $q$  deformation of the Gauss distribution. In: *J. Math. Phys.* 36 (1995), Nr. 9, 4743–4756. <http://dx.doi.org/10.1063/1.530917>. – DOI 10.1063/1.530917. – ISSN 0022–2488
- [LM96] LEEUWEN, Hans van ; MAASSEN, Hans: An obstruction for  $q$ -deformation of the convolution product. In: *J. Phys. A* 29 (1996), Nr. 15, 4741–4748. <http://dx.doi.org/10.1088/0305-4470/29/15/036>. – DOI 10.1088/0305-4470/29/15/036. – ISSN 0305–4470
- [Mey93] MEYER, Paul-André: *Lecture Notes in Mathematics*. Bd. 1538: *Quantum probability for probabilists*. Berlin : Springer-Verlag, 1993. – x+287 S. – ISBN 3–540–56476–4
- [MN97] MINGO, James A. ; NICA, Alexandru: Crossings of Set-Partitions and Addition of Graded-Independent Random Variables. In: *Int. J. Math.* 8 (1997), Nr. 5, 645–664. <http://www.mast.queensu.ca/~mingoj/graded.independence.ps>
- [NAA02] NODARSE, R. Álvarez ; ATAKISHIYEVA, M. K. ; ATAKISHIYEV, N. M.: On a  $q$ -extension of the Hermite polynomials  $H_n(x)$  with the continuous orthogonality property on  $\mathbb{R}$ . In: *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* 8 (2002), Nr. 2, S. 127–139. – ISSN 1405–213X
- [Nic95] NICA, Alexandru: A one-parameter family of transforms, linearizing convolution laws for probability distributions. In: *Comm. Math. Phys.* 168 (1995), Nr. 1, 187–207. <http://projecteuclid.org/getRecord?id=euclid.cmp/1104272290>. – ISSN 0010–3616
- [NS06] NICA, Alexandru ; SPEICHER, Roland: *London Mathematical Society Lecture Note Series*. Bd. 335: *Lectures on the combinatorics of free probability*. Cambridge : Cambridge University Press, 2006. – xvi+417 S. – ISBN 978–0–521–85852–6; 0–521–85852–6
- [Ora05] ORAVECZ, Ferenc: Nica’s  $q$ -convolution is not positivity preserving. In: *Comm. Math. Phys.* 258 (2005), Nr. 2, 475–478. <http://dx.doi.org/10.1007/s00220-005-1307-8>. – DOI 10.1007/s00220-005-1307-8. – ISSN 0010–3616
- [Pat02] PATHMANATHAN, Shayanthan: The Poisson Process in Quantum Stochastic Calculus. (2002). <http://eprints.maths.ox.ac.uk/46/>
- [RS80] REED, Michael ; SIMON, Barry: *Methods of modern mathematical physics. I*. Second. New York : Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], 1980. – xv+400 S. – ISBN 0–12–585050–6. – Functional analysis
- [RW97] ROTA, Gian-Carlo ; WALLSTROM, Timothy C.: Stochastic Integrals: A Combinatorial Approach. In: *Ann. Probab.* 25 (1997), Nr. 3, 1257–1283. <http://dx.doi.org/10.1214/aop/1024404513>. – DOI 10.1214/aop/1024404513. – ISSN 0091–1798

- [Spe94] SPEICHER, Roland: Multiplicative functions on the lattice of noncrossing partitions and free convolution. In: *Math. Ann.* 298 (1994), Nr. 4, 611–628. <http://dx.doi.org/10.1007/BF01459754>. – DOI 10.1007/BF01459754. – ISSN 0025–5831
- [Sta99] STANLEY, Richard P.: *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Bd. 62: *Enumerative combinatorics. Vol. 2*. Cambridge : Cambridge University Press, 1999. – xii+581 S. – ISBN 0–521–56069–1; 0–521–78987–7. – With a foreword by Gian-Carlo Rota and appendix 1 by Sergey Fomin
- [Sza09] SZABŁOWKI, Paweł J.: q-Gaussian Distributions: Simplifications and Simulations. In: *J. Prob. Stat.* 2009 (2009), 1–18. <http://dx.doi.org/10.1155/2009/752430>. – DOI 10.1155/2009/752430
- [VDN92] VOICULESCU, D. V. ; DYKEMA, K. J. ; NICA, A.: *CRM Monograph Series*. Bd. 1: *Free random variables*. Providence, RI : American Mathematical Society, 1992. – vi+70 S. – ISBN 0–8218–6999–X. – A noncommutative probability approach to free products with applications to random matrices, operator algebras and harmonic analysis on free groups