LA II – Wiederholungsaufgaben

— T. S. —

A41

$$M := \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ \kappa & \xi & \varrho \end{pmatrix} \in GL_3(\mathbb{R})$$

Berechne

$$MA = BM$$

$$MA = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ \kappa & \xi & \varrho \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b + \beta & \alpha c + \beta d \\ a\delta & b\delta + \varepsilon & \delta c + \varepsilon d \\ \kappa a & \kappa b + \xi & \kappa c + \xi d \end{pmatrix}$$

$$BM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ \kappa & \xi & \varrho \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \delta & \varepsilon & \eta \\ 2\kappa & 2\xi & 2\varrho \end{pmatrix}$$

Also:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \alpha a = 0 & \alpha b + \beta = 0 & \alpha c + \beta d = 0 \\ a\delta = \delta & b\delta + \varepsilon = \varepsilon & \delta c + \varepsilon d = \eta \\ 2\kappa = \kappa a & 2\xi = \kappa b + \xi & 2\varrho = \kappa c + \varrho d \end{array}}$$

Falls $a = 0 \Rightarrow \delta = 0,\ \kappa = 0$

$$\left.\begin{array}{l} \Downarrow \\ \xi = 0 \end{array}\right\} \xi \neq 0 \Rightarrow d = 2$$

$\uparrow$ Invertierbarkeit

usw.

A6 Beweis:

$$(c_{ij}) = C := AB$$
$$(d_{ij}) = D := BA.$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spur}(AB) &= \sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} b_{ii} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{ik} b_{ki} \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_{kk} b_{kk} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} a_{ki} b_{ik} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} b_{ik} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} b_{ik} a_{ki} \\
&= \sum_{i=1}^{n} d_{ii} \\
&= \operatorname{Spur}(BA).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

178| Beweis. λ Eigenwert von f

$$\Leftrightarrow \exists v \in V\setminus\{0\}: f(v) = \lambda v$$
$$\Leftrightarrow \exists v \in V\setminus\{0\}: (\lambda \mathrm{id} - f)(v) = 0$$
$\Leftrightarrow$ $\lambda \mathrm{id} - f$ ist kein Isomorphismus
$$\Leftrightarrow \det(\lambda \mathrm{id} - f) = 0$$
$\Leftrightarrow$ λ ist Nullstelle von $\chi_f(T) = \det(T\mathrm{id} - f)$.

179| Beweis: Sei f nilpotent mit Nilpotenzgrad $n \in \mathbb{N}$. Sei λ Eigenwert von f mit Eigenvektor $v \in V\setminus\{0\}$.

Dann gilt
$$Av = \lambda v$$
$$\Rightarrow \underbrace{f^n(v)}_{=0} = \lambda^n v$$
$$\Rightarrow \lambda = 0.$$

Folglich gilt für das charakt. Polynom $\chi_f(T) = T^n$.

Sei A Matrix von f bzgl. einer Basis. Dann ist A ähnlich zu ihrer Jordan-Normalform J, deren Diagonaleinträge die Eigenwerte von A, also Null, sind $\Rightarrow \mathrm{Spur}(J) = 0$.

$$\Rightarrow \mathrm{Spur}(f) = \mathrm{Spur}(A) = \mathrm{Spur}(J) = 0.$$

$\boxtimes$