Dr. Timo Spindeler

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Sommersemester 2025
Bielefeld, 12.06.2025

# Mathematik für Biologen und Biotechnologen

## Aufgabenblatt 10

**(36)** Berechnen Sie die folgenden Integrale:

(a) $\int_0^5 2x^3 - 4x + 1 \,\mathrm{d}x$,

(b) $\int_{-2}^2 \mathrm{e}^{2x+1} \,\mathrm{d}x$,

(c) $\int_2^3 x^2 \mathrm{e}^{-x} \,\mathrm{d}x$,

(d) $\int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x) \,\mathrm{d}x$,

(e) $\int_1^2 \frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+1} \,\mathrm{d}x$.

**(1+1+2+2+2 Punkte)**

**(37)** Die Wachstumsgeschwindigkeit einer Schimmelpilzkultur, die zu Beginn der Beobachtung eine Fläche von $10\,\mathrm{cm}^2$ bedeckt, wird für $t > 0$ modellhaft beschrieben durch die Funktion $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f(t) = \frac{40e^{t-3}}{(e^{t-3}+3)^2}$$

($t$ in Tagen, $f(t)$ in $\mathrm{cm}^2$ pro Tag).

(a) Zu welchen Zeitpunkten seit Beginn der Beobachtung wächst die Pilzkultur $2{,}5\,\mathrm{cm}^2$ pro Tag?

(b) Wann wächst die Schimmelpilzkultur am schnellsten?

(c) Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f$. Welche Stammfunktion sollte man in der gegebenen Situation wählen. Beantworten Sie mithilfe dieser Information die folgende Frage: Welche Fläche bedeckt die Kultur nach 6 Tagen?

**(1+2+3 Punkte)**

**(38)** Der Mittelwert einer dynamischen Größe kann durch das Integral ausgedrückt werden. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die einen Prozessverlauf beschreibt. Dann entspricht das Integral

$$\overline{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

dem Mittelwert von $f$. Angenommen die Temperatur $T$ im Gewächshaus der Universität Bielefeld wird innerhalb von 24 Stunden gemäß der Funktion

$$T(t) = \begin{cases} \frac{1}{8}t(24-t)+12, & \text{falls } t \in [0,12], \\ \sqrt{27}\cdot\sqrt{24-t}+12, & \text{falls } t \in [12,24], \end{cases}$$

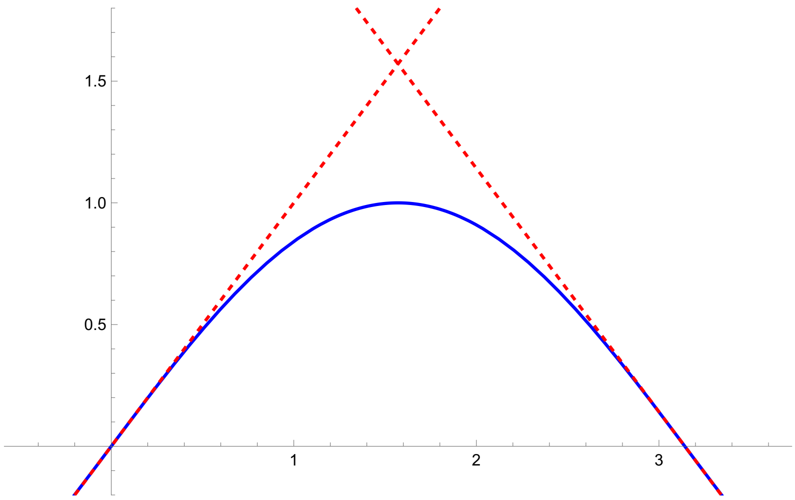
geregelt. Bestimmen Sie die durchschnittliche Temperatur $\overline{T}$ im Gewächshaus.

**(3 Punkte)**

**(39)** Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sin(x)$.

(a) Bestimmen Sie die Geradengleichungen der Tangenten in den Punkten 0 und $\pi$.

(b) Bestimmen Sie die Fläche, die von den Tangenten und der Funktion $f$ eingeschlossen wird.



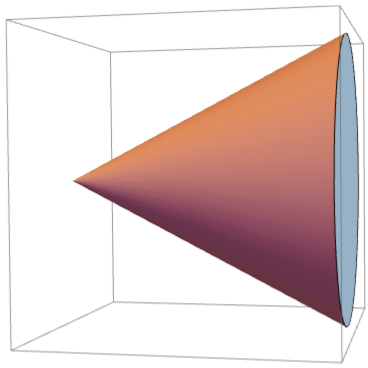

**(2+2 Punkte)**

**(Bonus)** Mit Hilfe der Integralrechnung können auch Volumen von räumlichen Körpern berechnet werden. Wir untersuchen nun die Berechnung des Volumens von Rotationskörpern. Dies sind räumliche Objekte, deren Oberfläche durch Rotation einer Kurve um eine gegebene Rotationsachse gebildet wird. Hierbei wollen wir uns auf die Rotation um die $x$-Achse einschränken.

Seien $0 \leqslant a \leqslant b$ oder $0 \geqslant b \geqslant a$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine nichtnegative oder nichtpositive differenzierbare Funktion. Es bezeichne $K_f$ den Rotationskörper, welcher durch die Rotation des Funktionsgraphen von $f$ um die $x$-Achse entsteht. Dann gilt für das Volumen $V$ des Rotationskörpers $K_f$:

$$V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \,\mathrm{d}x\,.$$

Bestimmen Sie mit dieser Formel (und passender Funktion $f$) das Volumen eines geraden Kreiskegels. Es sei daran erinnert, dass ein gerader Kreiskegel wie folgt aussieht:



**(3* Punkte)**

Abgabe bis 12 Uhr am Donnerstag, 19.06.2025.