

Mathematik für Biologen und Biotechnologen

Aufgabenblatt 11

- (40) Überprüfen Sie, ob die folgenden Integrale existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls.

(a) $\int_2^\infty \frac{1}{x^3} dx,$

(b) $\int_0^\infty x^2 e^{-x^3} dx,$

(c) $\int_1^2 \frac{1}{x \ln(x)} dx.$

(2+2+2 Punkte)

- (41) In den Naturwissenschaften tauchen häufig Größen X auf, die gewissen statistischen Schwankungen unterliegen (z.B. Körpergröße, Trächtigkeitszeiten bei Säugetieren, Temperatur, Lebenserwartung, ...). Da der Wert der Größe X in einer gewissen Weise vom Zufall abhängt, nennt man X auch Zufallsgröße. Formal ist eine Zufallsgröße eine Abbildung von der Menge aller möglichen Ereignisse eines Zufallsexperiment in die Menge der reellen Zahlen.

Eine Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ heißt *Dichtefunktion* (oder kurz *Dichte*), wenn p auf $(-\infty, \infty)$ integrierbar ist mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) dx = 1.$$

Häufig liegt für Zufallsgrößen eine empirisch bestimmte Dichte vor. Mit Hilfe der Dichtefunktion kann die Wahrscheinlichkeit $P(t_1 \leq X \leq t_2)$ berechnet werden, dass X Werte in einem gegebenen Intervall $[t_1, t_2] \subset \mathbb{R}$ annimmt:

$$P(t_1 \leq X \leq t_2) = \int_{t_1}^{t_2} p(x) dx.$$

Der *Erwartungswert* $\bar{X}$ einer Zufallsgröße X gibt diejenige Zahl an, die die Zufallsgröße im Mittel annimmt. Für eine Zufallsgröße X mit einer Dichtefunktion p ist der Erwartungswert gegeben durch

$$\bar{X} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) dx. \quad (1)$$

- (a) Sei $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass

$$p(x) = \begin{cases} \lambda \exp(-\lambda x), & \text{falls } x \geq 0, \\ 0, & \text{falls } x < 0, \end{cases}$$

eine Dichtefunktion ist.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der durch p definierten Zufallsgröße X .

(2+3 Punkte)

- (42) Der Fahrtenschreiber eines Sportwagens zeichnet bei einer Testfahrt die Geschwindigkeit v des Fahrzeugs auf. Sie kann durch die Funktion $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Vorschrift

$$v(t) = -\frac{24}{25}(t^2 - 20t)$$

(t in Sekunden, v in Metern/Sekunde) beschrieben werden.

- (a) In welchen Intervallen fällt die Funktion v monoton, in welchen Intervallen wächst Sie monoton?
- (b) Der insgesamt zurückgelegte Weg S wird berechnet durch das Integral

$$S = \int_0^{t_{\text{end}}} v(t) \, dt,$$

wobei $t_{\text{end}} > 0$ eine Nullstelle der Funktion v ist. Berechnen Sie S .

(2+2 Punkte)

- (43) Im folgenden wollen wir die Höhe einer Pflanze modellieren. Dazu soll eine Funktion $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ angegeben werden, sodass $f(t)$ die Höhe der Pflanze in Zentimetern am Zeitpunkt t beschreibt. Dabei beschreibt das Intervall $t = 0$ den Morgen des ersten Tages unserer Messung, $t = 1$ den Morgen des zweiten Tages, Wir machen dazu folgende Annahmen:

- Nachts wächst die Pflanze nicht. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass die Nächte durch die Intervalle $[n + \frac{1}{2}, n + 1]$ mit $n \in \{0, 1\}$ beschrieben werden.
- Tags wächst die Pflanze bei gutem Wetter (viel Sonnenschein) um 2 cm, bei schlechtem Wetter nur um einen Zentimeter. Am ersten Tag herrscht gutes Wetter, danach schlechtes Wetter.
- Das Wachstum der Pflanze beginnt und endet jeden Tag langsam und ist mittags am schnellsten, es lässt sich durch $w(n + t) = k_n \pi \sin(2\pi t)$ für $n \in \{0, 1\}$ und $t \in [0, \frac{1}{2}]$ beschreiben; wobei $k_n \in \mathbb{R}$ das Gesamtwachstum am jeweiligen Tag angibt.

Angenommen, die Pflanze ist zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade aus dem Boden kommt. Wie hoch ist sie nach zwei Tagen? Berechnen Sie hierzu ein passendes Integral!

(4 Punkte)

(Bonus) (a) Berechnen Sie die folgenden Integrale, falls sie existieren:

(i) $\int_0^1 \ln(\sqrt{x}) \, dx,$

(ii) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx,$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} x^3 \, dx.$

(b) Bestimmen Sie eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = \sin(mx) \cos(nx)$, wobei $m, n \in \mathbb{R}$.

Hinweise: zu (a)(i): Sie dürfen ohne Begründung verwenden, dass $\lim_{x \searrow 0} x \ln(\sqrt{x}) = 0$ gilt.

zu (a)(ii): Substituieren Sie $x = \sin(y)$.

(6*+3* Punkte)