

Mathematik für Biologen und Biotechnologen

Aufgabenblatt 7

- (24) (a) Geben Sie die Zuordnungsvorschrift für die nachstehenden Folgen an:
- (i) 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, ...
 - (ii) 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320, ...
 - (iii) -9, 25, -49, 81, -121, 169, -225, 289, -361, ...
- (b) Geben Sie explizit jeweils eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ an, die die folgenden Eigenschaften erfüllt:
- (i) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen $\sqrt{3}$.
 - (ii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.
 - (iii) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist unbeschränkt, so dass die Folge $(\frac{a_n}{n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

(3+3 Punkte)

- (25) Begründen Sie, ob die nachstehenden Folgen konvergieren. Falls ja, geben Sie den Grenzwert an.

(a) $a_n = \frac{5n(n-3)}{4n^2+8n},$
(b) $b_n = \frac{\sin(\pi n)n^4+2n^2 \cos(n)+2n^5}{4n^5},$

(2+2 Punkte)

- (26) (a) Stellen Sie die folgenden Summen als möglichst einfache Brüche dar:

$$\sum_{j=1}^{10} \left(\frac{8}{3}\right)^j \quad \text{und} \quad \sum_{k=2}^8 \left(\frac{2}{5}\right)^k.$$

- (b) Überprüfen Sie, ob die Grenzwerte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{7}{4}\right)^i \quad \text{und} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{6 \cdot 2^{j-1}}{2^{j+1}}$$

existieren. Berechnen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

- (c) Sie werfen einen Ball 4m hoch. Der Ball fällt zu Boden und steigt mit jedem Kontakt des Bodens auf $\frac{4}{5}$ der Höhe des vorherigen Sprungs auf. Wenn der Ball beim 30. Mal auf den Boden trifft, wie lang ist die Gesamtstrecke, die der Ball zurückgelegt hat?

(2+2+3 Punkte)

(27) Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen:

- $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = 3x^2 - 4x + 3$,
- $f_2 : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \frac{1}{4} \ln(x^3)$,
- $f_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_3(x) = \sqrt{x} \cdot \cos(2^x)$,
- $f_4 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f_4(x) = \frac{2 \sin\left(x^{\frac{1}{5}}\right)}{-5+2x^2+x^4}$.

(1+2+2+2 Punkte)

(Bonus) Wenn man in der Literatur nach dem *goldenen Schnitt* Φ sucht, findet man zwei scheinbar verschiedene Antworten, nämlich

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad \Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Zeigen Sie, dass beide Ausdrücke dieselbe Zahl beschreiben.

Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, die durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$ gegeben ist. Sie dürfen ohne Begründung davon ausgehen, dass $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine positive Zahl konvergiert.

(4* Punkte)

Abgabe bis 12 Uhr am Donnerstag, 29.05.2025.