Dr. Timo Spindeler

Fakultät für Mathematik,
Universität Bielefeld

Sommersemester 2025
Bielefeld, 29.05.2025

Mathematik für Biologen und Biotechnologen

Aufgabenblatt 8

(28) (a) Eine Population wächst entsprechend dem exponentiellen Wachstumsmodell, wenn sie proportional zu ihrer Größe zunimmt. Beschreibt $y(t)$ die Populationsgröße zum Zeitpunkt t, so lässt sich das exponentielle Wachstum durch die Beziehung

$$y'(t) = ky(t), \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(t_0) = y_0, \tag{1}$$

beschreiben, wobei k der Proportionalitätsfaktor ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(t) = y_0 \mathrm{e}^{k(t-t_0)}$ die Beziehung aus (1) erfüllt.

(b) Eine Population wächst entsprechend dem beschränkten Wachstumsmodell, wenn sie proportional zu $S - y(t)$ zunimmt, wobei S die Sättingungsgrenze ist. Das beschränkte Wachstum lässt sich also durch die Beziehung

$$y'(t) = k\big(S - y(t)\big), \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(t_0) = y_0, \tag{2}$$

beschreiben, wobei k der Proportionalitätsfaktor ist. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(t) = S - \big(S - y_0\big)\mathrm{e}^{-k(t-t_0)}$ die Beziehung aus (2) erfüllt.

(c) Eine Population wächst entsprechend dem logistischem Wachstumsmodell, wenn sie proportional zu $y(t)$ und $S - y(t)$ zunimmt. Das logistische Wachstum lässt sich also durch die Beziehung

$$y'(t) = ky(t)\big(S - y(t)\big), \qquad \text{mit der Anfangsbedingung } y(t_0) = y_0, \tag{3}$$

beschreiben. Zeigen Sie, dass die Funktion $y(t) = \frac{y_0 S}{y_0 + \big(S - y_0\big)\mathrm{e}^{-Sk(t-t_0)}}$ die Beziehung aus (3) erfüllt.

(1+2+3 Punkte)

(29) Bestimmen Sie die Ableitungen von $\arcsin(x)$ und $\arccos(x)$ für alle $x \in (-1, 1)$.

(3 Punkte)

(30) Gegeben sei die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - 2x^2 + 4x + 1.$$

Finden Sie alle Tangenten der Funktion f, die durch den Punkt $(0, 1)$ verlaufen. Geben Sie die zugehörige Geradengleichungen und die Schnittpunkte mit f an.

Hinweis: Berechnen Sie erst die Tangente an einer beliebigen Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ und überprüfen Sie dann, welche Tangenten durch den Punkt $(0, 1)$ verlaufen.

(4 Punkte)

(31) Manchmal ist es hilfreich, eine differenzierbare Funktion f durch Polynome zu approximieren. Dazu betrachten wir die Polynome

$$T_n[f,a](x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\big(x-a\big)^k ,$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Hierbei ist $f^{(k)}$ die k-te Ableitung von f, d.h. $f^{(k)} = \big(f^{(k-1)}\big)'$ mit $f^{(0)} = f$. Berechnen Sie $T_n[f,a]$ für

(a) $f(x) = \ln(x)$ und $a = 1$,

(b) $f(x) = \sin(x)$ und $a = 0$,

für alle $n \in \{1,2,3\}$.

(3+3 Punkte)

(Bonus) Überprüfen Sie mittels der Definition, ob die folgenden Funktionen in 0 differenzierbar sind:

(a)

$$f_1(x) = \begin{cases} -x, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

(b)

$$f_2(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

(2*+2* Punkte)

Abgabe bis 12 Uhr am Donnerstag, 05.06.2025.