Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 10

Sei K ein Körper.

Aufgabe 1. Seien V und W endlich-dimensionale K-Vektorräume. Beweisen Sie: Die Abbildung

$$\phi : \mathrm{Hom}_K(V,W) \to \mathrm{Hom}_K(W^*,V^*), \quad f \mapsto f^*,$$

die einer K-linearen Abbildung f ihre duale Abbildung f^* zuordnet, ist K-linear.[1]

Aufgabe 2. Sei $K = \mathbb{Q}$ und

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 2 & -8 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ -3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$D := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie alle möglichen Produkte dieser Matrizen, sowie die Ränge aller beteiligten Matrizen.

Aufgabe 3. Seien $l, m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{n,m}(K)$ und $B \in \mathrm{Mat}_{m,l}(K)$. Wir bezeichnen mit $\mathrm{rk}'(A)$ und $\mathrm{rk}'(B)$ den (Spalten-)Rang der Matrizen A bzw. B. Zur Erinnerung: Ist $f_A : K^m \to K^n$ die K-lineare Abbildung $x \mapsto xA^{\mathrm{tr}}$, so ist $\mathrm{rk}'(A) = \dim(\mathrm{im}(f_A))$. Analoges gilt für B und AB.

Ziel dieser Aufgabe ist es, die folgenden Ungleichungen zu beweisen:

$$\mathrm{rk}'(A) + \mathrm{rk}'(B) - m \leq \mathrm{rk}'(AB) \leq \min\{\mathrm{rk}'(A), \mathrm{rk}'(B)\}. \tag{1}$$

Der Beweis erfolgt in zwei Schritten:

- Betrachten Sie zunächst die Einschränkung $g := f_A|_{\mathrm{im}(f_B)}$. Beachten Sie, dass $\mathrm{im}(g) = \mathrm{im}(f_{AB})$ und $\ker(g) = \ker(f_A) \cap \mathrm{im}(f_B) \leq \ker(f_A)$ gilt. Zeigen Sie, etwa mithilfe des Dimensionssatzes, dass
$$\mathrm{rk}'(AB) = \mathrm{rk}'(B) - \dim(\ker(g)) \tag{2}$$
gilt, woraus $\mathrm{rk}'(AB) \leq \mathrm{rk}'(B)$ folgt. Folgern Sie nun die zweite Ungleichung in (1).
- Folgern Sie aus (2) (etwa wieder mit Hilfe des Dimensionssatzes), dass
$$\mathrm{rk}'(AB) \geq \mathrm{rk}'(B) - \dim(\ker(f_A)) = \mathrm{rk}'(B) - (m - \mathrm{rk}'(A))$$
gilt, also die erste Ungleichung in (1) gilt.

Geben Sie Beispiele an, in denen anstelle der ersten bzw. der zweiten Ungleichung in (1) eine Gleichung steht.

[1] Proposition 5.36 besagt, dass ϕ sogar ein K-linearer *Isomorphismus* ist. Bis auf die hier zu zeigende Linearität wird bzw. hatten wir die Proposition in der Vorlesung bewiesen.