Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Winterersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 2[1]

Durchweg seien X, Y, Z Mengen.

Aufgabe 1. Für eine Teilmenge $M \subseteq X$ bezeichne $M^c = X \setminus M$ das *Komplement* von M in X. Seien $M, N, P \subseteq X$ beliebige Teilmengen. Zeigen Sie:

(1) $(M \cup N)^c = M^c \cap N^c$,
(2) $(M \cap N)^c = M^c \cup N^c$,
(3) $M^c \setminus N = (M \cup N)^c$,
(4) $M \setminus (N \cup P) = M \cap (N \cup P)^c = (M \setminus N) \cap (M \setminus P) = M \cap N^c \cap P^c$.

Zeichnen Sie Mengendiagramme, die die jeweiligen Mengen illustrieren.

Seien $M \subseteq X$ und $N \subseteq Y$ Teilmengen sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. Man nennt

$$f(M) := \{y \in Y \mid \exists x \in M : y = f(x)\}$$

das *Bild* (engl. *image*) von M (unter f) und

$$f^{-1}(N) := \{x \in X \mid f(x) \in N\}$$

das *Urbild* (engl. *pre-image*) von N (unter f).

Aufgabe 2. Seien $M_1, M_2 \subseteq X$ und $N_1, N_2 \subseteq Y$ Teilmengen. Zeigen Sie:

(1) $f(M_1 \cup M_2) = f(M_1) \cup f(M_2)$,
(2) $f(M_1 \cap M_2) \subseteq f(M_1) \cap f(M_2)$,
(3) $f^{-1}(N_1 \cup N_2) = f^{-1}(N_1) \cup f^{-1}(N_2)$,
(4) $f^{-1}(N_1 \cap N_2) = f^{-1}(N_1) \cap f^{-1}(N_2)$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Inklusion in (2) strikt sein kann.

Aufgabe 3. Es bezeichne $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$ die Potenzmenge von X. Konstruieren Sie bzw. zeigen Sie die Nichtexistenz einer Abbildung

(1) $i : X \to \mathcal{P}(X)$, die injektiv ist, sowie einer Abbildung
(2) $s : X \to \mathcal{P}(X)$, die surjektiv ist.

(Hinweis zu (2): Gegeben eine surjektive "Kandidatin" s, betrachten Sie die Menge $Y = \{x \in X \mid x \notin s(x)\} \in \mathcal{P}(X)$.)

Ist $g : Y \to Z$ eine Abbildung, so ist die *Verknüpfung* (engl. *composition*) von g und f definiert als die Abbildung

$$g \circ f : X \to Z, \quad x \mapsto g(f(x)).$$

Aufgabe 4. Beweisen Sie:

(1) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
(2) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.

[1] Die Präsenzübungen beginnen in Woche 2. Es gibt kein Präsenzübungsblatt 1.

Gelten die jeweiligen Behauptungen auch für die jeweils andere Abbildung f bzw. g? Beweisen Sie, oder geben Sie Gegenbeispiele.

Es bezeichne X^Y die Menge aller Abbildungen von Y nach X.

Aufgabe 5.
(1) Bestimmen Sie die Mengen $\varnothing^Y$ und $X^\varnothing$ explizit.
(2) Angenommen X und Y sind endliche Mengen. Bestimmen Sie die Kardinalität der Menge X^Y.

Wir schreiben $X \sim Y$, falls eine bijektive Abbildung $f : X \to Y$ existiert.

Aufgabe 6. Zeigen Sie:
(1) Wenn $X \cap Y = \varnothing$, so gilt $X^{Y \cup Z} \sim X^Y \times X^Z$.
(2) $(X \times Y)^Z \sim X^Z \times Y^Z$.
(3) $X^{Y \times Z} \sim (X^Y)^Z$.

Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Hypothese in (1) notwendig ist.