Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Winterersemester 2017/18

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $r, s \in \mathbb{Z}$. Wir nennen r und s *kongruent modulo* n, symbolisch

$$r \equiv s \bmod (n) \quad \text{oder} \quad r \equiv_n s,$$

falls $r - s \in n\mathbb{Z} = \{ni \mid i \in \mathbb{Z}\}$, d.h. falls die Differenz $r - s$ durch n teilbar ist.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass $\equiv_n$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ ist.

Die Äquivalenzklasse von r wird mit $[r]_n$ bezeichnet — oder schlicht mit $[r]$, wenn n klar ist — und die *Restklasse von r modulo n* genannt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $[r]_n = r + n\mathbb{Z} = \{r + ni \mid i \in \mathbb{Z}\}$ und dass

$$\{[i]_n \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{[0]_n, [1]_n, \ldots, [n-1]_n\} =: \mathbb{Z}/(n).$$

Die Menge $\mathbb{Z}/(n)$ der Äquivalenzklassen wird die Menge der *ganzen Zahlen modulo n* genannt[1].Wir definieren auf $\mathbb{Z}/(n)$ eine Operation $+_n$ wie folgt:

$$\begin{aligned} +_n : \mathbb{Z}/(n) \times \mathbb{Z}/(n) &\to \mathbb{Z}/(n) \\ ([r]_n, [s]_n) &\mapsto [r+s]_n \end{aligned}$$

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass diese *Addition modulo n* wohldefiniert, d.h. von den Repräsentanten r und s unabhängig ist, und auf $\mathbb{Z}/(n)$ die Struktur einer abelschen Gruppe definiert.

Aufgabe 4. Berechnen Sie die Verknüpfungstafeln der Gruppen $\mathbb{Z}/(n)$ für $n \in \{2, 3, 4\}$.

[1]Man findet auch die Notationen $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}_n$ in der Literatur.