

Lineare Algebra 1
Präsenzübungsblatt 8

Seien K ein Körper und V ein K -Vektorraum.

Aufgabe 1. Seien W_1 und W_2 K -lineare Unterräume von V . Betrachten Sie die Abbildung

$$\begin{aligned}\phi : W_1 \oplus W_2 &\rightarrow V \\ (w_1, w_2) &\mapsto w_1 + w_2.\end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass ϕ K -linear ist, und beschreiben Sie $\text{im}(\phi)$ und $\text{ker}(\phi)$. Folgern Sie, dass ϕ genau dann ein K -linearer Isomorphismus ist, wenn W_1 und W_2 komplementär in V sind. (Man sagt in diesem Fall auch, dass V die (*interne*) *direkte Summe* von W_1 und W_2 ist, und schreibt $V = W_1 \oplus W_2$.)

Aufgabe 2. Angenommen $\dim_K V < \infty$. Es sei

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \dots \subseteq W_n$$

eine Folge¹ K -linearer Unterräume von V .

- (1) Zeigen Sie, dass es für $i = 1, \dots, n$ jeweils ein Komplement W'_i von W_i in V gibt derart, dass

$$W'_n \subseteq \dots \subseteq W'_2 \subseteq W'_1$$

gilt.

- (2) Bestimmen Sie eine solche komplementäre Fahne (W'_i) für die Fahne im \mathbb{Q} -Vektorraum \mathbb{Q}^3 bestehend aus den \mathbb{Q} -linearen Unterräumen

$$W_1 = \langle (3, -3, 1) \rangle_{\mathbb{Q}},$$

$$W_2 = W_1 + \langle (-2, 1, 1) \rangle_{\mathbb{Q}},$$

$$W_3 = W_2 + \langle (0, 3, -1) \rangle_{\mathbb{Q}}.$$

Aufgabe 3. Für welche Werte von $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es eine \mathbb{R} -lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\phi((3, -1)) = (1, 1),$$

$$\phi((-3, 5)) = (1, \lambda),$$

$$\phi((0, 4)) = (2, 3)?$$

¹Man spricht auch von einer *Fahne* in V – sehen Sie, warum?