Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Übungsblatt 2

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 26. April 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Seien K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum.

Aufgabe 1. ('Korollar 1.17 der VL') Seien W ein weiterer K-Vektorraum der K-Dimension n und $\beta : V \times W \to K$ eine nicht ausgeartete Bilinearform. Es seien $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$ Basen von V bzw. W und B die Strukturmatrix von β bezgl. $\mathcal{B}_W$ und $\mathcal{B}_V$. Zeigen Sie:

(1) Ist $h \in \mathrm{End}(V)$ dargestellt durch die Matrix $A = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}(h)$, so ist $h^\wedge$ dargestellt durch
$$B^{-1}A^{\mathrm{t}}B = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_W}(h^\wedge).$$

(2) Ist $k \in \mathrm{End}(W)$ dargestellt durch $C = M^{\mathcal{B}_W}_{\mathcal{B}_W}(k)$, so ist ${}^\wedge k \in \mathrm{End}(V)$ dargestellt durch
$$(B^{-1})^{\mathrm{t}}C^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}} = M^{\mathcal{B}_V}_{\mathcal{B}_V}({}^\wedge k).$$

Aufgabe 2. Es seien $\beta : V \times V \to K$ eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform und $U \leq V$ ein K-linearer Unterraum. Auf dem Präsenzaufgabenblatt 2 hatten wir das orthogonale Komplement
$$U^\perp := \{v \in V \mid \beta(u, v) = 0 \text{ für alle } u \in U\}$$
definiert. Zeigen Sie

(1) dass die Formel
$$\dim U + \dim U^\perp = \dim V$$
gilt.

(2) anhand von Beispielen, dass
   (a) die Gleichung in (1) im Allgemeinen falsch wird, wenn die Bedingung 'β nicht ausgeartet' fallen gelassen wird und
   (b) auch im nicht ausgearteten Fall nicht notwendigerweise $V = U \oplus U^\perp$ gilt.

Aufgabe 3. ('Satz 1.29 der VL') Es sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei q eine nicht ausgeartete quadratische Form auf V. Zeigen Sie: Es existiert eine $\mathbb{R}$-Basis $\mathcal{B}$ von V, bezüglich derer die Strukturmatrix von q die Gestalt
$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$$
hat.

Aufgabe 4. Bestimmen Sie, für jede der beiden folgenden symmetrischen reellen Matrizen B, eine invertierbare Matrix T derart, dass $T^{\mathrm{t}}BT$ diagonal ist. Bestimmen Sie jeweils Rang und Signatur der entsprechenden quadratischen Formen.

(1)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

(2)
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$