Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Lineare Algebra 2
Präsenzübungsblatt 13

Mit $i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C}$ definieren wir die *Gaußschen*[1] *Zahlen*

$$R := \{a + ib \in \mathbb{C} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

und die *Normfunktion*

$$n : R \to \mathbb{N}_0, \quad a + ib \mapsto a^2 + b^2.$$

Aufgabe 1.

(1) Zeigen Sie: n ist eine Euklidische Normfunktion im Sinne von Definition 4.5 der Vorlesung. (Hinweis: Sind $x, y \in R$ mit $x \neq 0$ gegeben, versuchen Sie, die komplexe Zahl y/x durch eine Gaußsche Zahl q zu approximieren.)

(2) Die Gaußschen Zahlen bilden also ein euklidischer Ring. Bestimmen Sie die Einheitengruppe dieses Ringes.

Aufgabe 2.

(1) Bestimmen Sie die Invariantenteiler $c_1, c_2 \in R$ der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 4i & 2-i \\ -1+2i & 3-2i \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_2(R).$$

(2) Bestimmen Sie Matrizen $P, Q \in \mathrm{GL}_2(R)$ mit

$$PAQ = \mathrm{diag}(c_1, c_2).$$

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 3. Seien nun K ein beliebiger Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A, B \in \mathrm{Mat}_n(K)$. Zeigen Sie:

(1) Genau dann sind A und B äquivalent über K, wenn $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$.

(2) Ist $K = \mathbb{R}$ und sind A und B symmetrisch, so sind A und B genau dann konjugiert über $\mathbb{R}$, wenn $\chi_A = \chi_B$, d.h. wenn ihre charakteristischen Polynome übereinstimmen.

[1] Carl Friedrich Gauß, 1777 – 1855