Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie
Präsenzübungsblatt 15

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Funktion
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y)^{\mathrm{t}} \mapsto \cos(x^2 + y^2).$$
(1) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix von f.
(2) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die (sog. Potential-)Funktion
$$u : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad (x, y)^{\mathrm{t}} \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$
und das von ihr induzierte elektrische (Vektor-)Feld $E = \nabla u$, verursucht durch eine Punktladung im Nullpunkt.
(1) Berechnen und skizzieren Sie das Vektorfeld E.
(2) Zeigen Sie, dass die Kurve C_1 mit Parameterdarstellung
$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$
zu jeder Zeit senkrecht zu E verläuft, d.h. $\langle E(x(t)), x'(t)\rangle = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Tragen Sie C_1 in Ihre Skizze von E ein.
(3) Bestimmen Sie die Zeiten $t \in \mathbb{R}$, zu denen die Kurve C_2 mit Parameterdarstellung
$$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 2t + 1 \end{pmatrix}$$
zu E senkrecht verläuft. Tragen Sie auch C_2 und diese Zeiten in Ihre Skizze von E ein.

Aufgabe 3. Betrachten Sie das Vektorfeld
$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{t}} \mapsto (x_1, 2x_2, 3x_3).$$
(1) Bestimmen Sie die Kurvenintegrale
$$\int_{C_i} f(x)dx,$$
wobei, für $i \in \{1, 2\}$, C_i die Kurve ist mit Parameterdarstellung
$$x_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t, t, t)^{\mathrm{t}}, & \text{falls } i = 1, \\ (t, t^2, t^4)^{\mathrm{t}}, & \text{falls } i = 2. \end{cases}$$
(2) Ist f ein Gradientenfeld?