Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Sommersemester 2018

Mathematik 2 für Chemie

Präsenzübungsblatt 3

Aufgabe 1. Es sei $\mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome in einer Variablen x und, für $N \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{R}[x]_N$ die Menge der Polynome in $\mathbb{R}[x]$ vom Grad höchstens N, d.h. von der Form

$$f(x) = \sum_{i=0}^{N} a_i x^i.$$

Zeigen Sie, dass

(1) $\mathbb{R}[x]_N$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[x]$ ist.
(2) $\mathbb{R}[x]$ nicht endlich erzeugt ist.
(3) $\mathbb{R}[x]_N$ endlich erzeugt ist. Finden Sie ein Erzeugendensystem mit $N+1$ Vektoren? Eins mit N Vektoren?

Aufgabe 2. Wir betrachten die Vektoren

(1)
$$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}\text{-Vektorraum } \mathbb{R}^3,$$

(2)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}\text{-Vektorraum } \mathbb{R}^4,$$

(3)
$$\frac{1}{3}, \frac{4}{5}, \frac{7}{11} \text{ im } \mathbb{Q}\text{-Vektorraum } \mathbb{R}.$$

(4)
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -i-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i+2 \\ -i \end{pmatrix} \text{ im } \mathbb{R}\text{-Vektorraum } \mathbb{C}^2.$$

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die gegebenen Vektoren

- linear unabhängig sind,
- ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden.

Aufgabe 3. Wir betrachten die folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x - y = 0 \right\}, \quad W = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

(1) Skizzieren Sie V und W.
(2) Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$ ist, W hingegen nicht.
(3) Berechnen und skizzieren Sie $V \cap W$.