Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 1

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

gilt.

Aufgabe 2. Finden Sie den Fehler in folgendem Induktionsbeweis.

Behauptung $A(n)$ für $n \geq 1$: Beliebige n natürliche Zahlen sind gleich.
Induktionsanfang $n = 1$: $A(1)$ ist offenbar richtig.
Induktionsschritt $n \to n+1$ $(n \geq 1)$: Betrachte eine beliebige Menge $\{a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ von $n+1$ natürlichen Zahlen. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $a_1 = \cdots = a_n$ und $a_2 = \cdots = a_{n+1}$, also auch $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$, da a_2 ja in beiden Gleichungsketten auftaucht.

Aufgabe 3. Die Fibonacci-Zahlen f_n sind rekursiv definiert durch

$$f_0 = 0, \quad f_1 = 1, \quad f_n = f_{n-2} + f_{n-1} \text{ für } n \geq 2.$$

Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen n die Gleichung

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

gilt.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Rekursion

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 5, \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} \text{ für } n \geq 3.$$

Berechnen Sie die ersten a_n und formulieren Sie eine Vermutung über die Form von a_n. Beweisen Sie diese mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 5. Sei n eine natürliche Zahl. In wieviele Gebiete a_n kann man die Ebene mit n Geraden *maximal* zerlegen? Bestimmen Sie eine geschlossene (nichtrekursive) Formel für a_n.

Aufgabe 6. Was ist die kleinste natürliche Zahl n, ab der die Ungleichung $2^n > n^2$ gilt? Beweisen Sie Ihre Vermutung mittels vollständiger Induktion nach n.