Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I

Präsenzübungsblatt 12

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Gegeben seien die folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 := \frac{2-i}{2+3i}, \quad z_2 := \frac{3-2i}{1+4i}, \quad z_3 := \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4, \quad z_4 := \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}.$$

Schreiben Sie die Zahlen

(1) $z_1, \ldots, z_4$,
(2) $z_1^{-1}, \ldots, z_4^{-1}$,
(3) $z_1 z_2$

in der Form $z = a + ib$, mit $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Beträge

$$|z_1|, \quad |z_2|, \quad |z_1 z_2|, \quad |z_4 - z_3|.$$

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt.

Aufgabe 3. Skizzieren Sie folgende Teilmengen der komplexen Zahlenebene. Hierbei bezeichnen wir, für eine komplexe Zahl $z = a + bi$, mit $\mathrm{re}(z) = a$ den Realteil und $\mathrm{im}(z) = b$ den Imaginärteil von z.

(1)
$$\left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1, \mathrm{re}(z) < \frac{1}{2} \right\}$$

(2)
$$\{ z \in \mathbb{C} \mid 2\,\mathrm{re}(z) - \mathrm{im}(z) = 0 \}$$

(3)
$$\{ z \in \mathbb{C} \mid z^4 = 1 \}$$

(4)
$$\{ z \in \mathbb{C} \mid z = \overline{z} \}$$

Aufgabe 4. Faktorisieren Sie die folgenden Polynome als Produkte von Linearfaktoren.

(1) $x^2 + 1$
(2) $\frac{1}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x - 3$
(3) $x^3 - 2x^2 + x - 2$
(4) $-x^3 + 2x^2 + 5x - 6$

Hinweis: 1 ist eine Nullstelle der Polynome in (2) und (4). Das Polynom in (1) teilt das Polynom in (3).