Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 3

⋆⋆⋆

Eine Menge S heißt *abzählbar*, wenn eine Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to S$ existiert, die surjektiv ist, d.h. derart, dass für jedes $s \in S$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert derart, dass $\phi(n) = s$.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen abzählbar sind:

(1) jede endliche Menge,
(2) $\mathbb{N}$,
(3) $\mathbb{Z}$,
(4) $\mathbb{Q}$.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist.
Hinweis. Es genügt zu zeigen, dass das Intervall $[0,1]$ der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 nicht abzählbar ist. Nehmen Sie, zwecks eines Widerspruchsbeweises, an, dass $[0,1]$ abzählbar wäre, also eine surjektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to [0,1]$ existierte. Tabellieren Sie deren Werte:

$$\begin{array}{c|l} n & \phi(n) \\ \hline 1 & 0,\underline{n_{11}}\, n_{12}\, n_{13}\, \dots \\ 2 & 0, n_{21}\, \underline{n_{22}}\, n_{23}\, \dots \\ 3 & 0, n_{31}\, n_{32}\, \underline{n_{33}}\, \dots \\ \vdots & \qquad\qquad\quad \ddots \end{array},$$

wobei $n_{ij} \in \{0,1,2,\dots,9\}$ die j-te Nachkommastelle der reellen Zahl $\phi(i)$ ist. Wenn Sie es nun schaffen, eine reelle Zahl zu konstruieren, die nicht auf dieser Liste steht, haben Sie den gewünschten Widerspruch gefunden. Tipp: die j-te Nachkommastelle dieser Zahl muß von n_{jj} verschieden sein für alle $j \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Gliedern

$$a_n = \frac{n(n+4)-3}{n^2-1}.$$

(1) Zeigen Sie, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ gilt.
(2) Bestimmen Sie jeweils ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ derart, dass $|a_n - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$, wobei
- $\varepsilon = \frac{1}{10}$,
- $\varepsilon = \frac{1}{100}$,
- ε beliebig ist.

Aufgabe 4. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Limes $a \neq 0$. Zeigen Sie, dass fast alle (d.h. alle bis auf endlich viele) Folgenglieder ungleich Null sind.
Hinweis. Beweis durch Widerspruch.

Aufgabe 5. Was ist die Negation (Verneinung)

(a) der Bedingung für Konvergenz einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

(b) der Bedingung für Beschränktheit nach oben einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$?