

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 4

Aufgabe 1. Beweisen Sie, dass jede positive reelle Zahl eine Quadratwurzel in \mathbb{R} besitzt.

Hinweis. Intervallschachtelung und Vollständigkeitssatz.

Aufgabe 2. Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchy-Folge.

(ii) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a_N| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass jede Cauchy-Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die folgende Aussage:

“Eine reelle Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N = N(\varepsilon) : \forall n > N : |a_n - a_{n-1}| < \varepsilon.”$$

Beweisen Sie diese Aussage oder finden Sie ein Gegenbeispiel.