

Mathematik für Naturwissenschaften I
Präsenzübungsblatt 6

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall.

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass das Produkt fg zweier stetiger Funktionen $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Aufgabe 2. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist die Negation der folgenden Aussagen?

- (a) f ist stetig in $a \in D$.
- (b) f ist stetig.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Funktion $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\sigma(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \geq 0, \\ -1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$ nicht stetig ist, einmal durch Angabe einer geeigneten Folge und einmal mit dem ε - δ -Kriterium. Skizzieren Sie den Graphen von σ .

Aufgabe 4. Betrachten Sie eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ungeraden Grades, also der Form

$$p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

mit $n \in \mathbb{N}$ ungerade, $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $a_n \neq 0$. Zeigen Sie, dass p surjektiv ist, d.h. das Bild $p(\mathbb{R}) := \{p(x) \mid x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ gilt.

Hinweis. Zwischenwertsatz. Unterscheiden Sie die Fälle $a_n < 0$ und $a_n > 0$ und untersuchen Sie $p(x)$ für $x \rightarrow \infty$ und $x \rightarrow -\infty$.