Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 1

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, den 17. Oktober 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Durchweg sei G eine Gruppe.

Aufgabe 1. Die Gruppe G habe die Ordnung n, d.h. $|G| = n$. Zeigen Sie: G ist isomorph zu einer Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_n.

(Hinweis: Betrachten Sie, für $g \in G$, die Abbildung

$$\phi_g : G \to G, \quad h \mapsto gh.$$

Zeigen Sie, dass

$$\phi : G \to \mathrm{Sym}(G), \quad g \mapsto \phi_g$$

ein injektiver Gruppenhomomorphismus ist. (Insbesondere ist die Wohldefiniertheit von ϕ zu zeigen!))

Aufgabe 2. Es gelte $g^2 = e$ für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass G abelsch ist.

Aufgabe 3. Sei G endlich und abelsch. Zeigen Sie, dass die Identität

$$\prod_{g \in G} g^2 = e$$

gilt.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{End}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Endomorphismus von } G\}$$

einen Monoid (bezüglich der Komposition von Gruppenhomomorphismen) bildet. Bestimmen Sie die Gruppen G, für die $\mathrm{End}(G)$ eine Gruppe ist.

Zeigen Sie ferner, dass

$$\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Automorphismus von } G\}$$

eine Gruppe (bezüglich der Komposition von Gruppenhomomorphismen) bildet.

Bestimmen Sie $\mathrm{End}((\mathbb{Z}, +))$ und $\mathrm{Aut}((\mathbb{Z}, +))$.