Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 11

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 09. Januar 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Betrachten Sie die Körper
(1) $L_1 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{3})$,
(2) $L_2 := \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt{-3})$.

Welche der Erweiterungen $L_i/\mathbb{Q}$, $i = 1, 2$, ist Galoissch? Bestimmen Sie gegebenenfalls jeweils die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L_i/\mathbb{Q})$.

Aufgabe 2. Betrachten Sie die Erweiterung $L/\mathbb{Q}$, wobei $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(1) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ Galoissch ist.
(2) Beschreiben Sie
- alle Untergruppen der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/Q)$ und
- alle Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq E \subseteq L$

und erklären Sie, welche Untergruppen welchen Zwischenkörpern unter der Galoiskorrespondenz (Satz 4.6 der Vorlesung) entspricht. Welche der hierbei auftretenden Zwischenerweiterungen sind normal? Welche der auftretenden Galoisgruppen sind normal?

Aufgabe 3. Sei $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \zeta_3)$, wobei ζ_3 eine nichttriviale dritte Einheitswurzel, d.h. eine von 1 verschiedene Lösung der Gleichung $X^3 = 1$ in $\overline{\mathbb{Q}}$, einem festen algebraischen Abschluss von $\mathbb{Q}$.
(1) Zeigen Sie, dass $L/\mathbb{Q}$ Galoissch ist, und bestimmen Sie die Galoisgruppe G.
(2) Bestimmen Sie, wenn möglich, Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq E_i \leq L$, $i \in \{1, 2\}$, derart, dass
- die Erweiterung $E_1/\mathbb{Q}$ normal ist bzw.
- die Erweiterung $E_2/\mathbb{Q}$ nicht normal ist.

oder argumentieren Sie, wieso solche Erweiterungen nicht existieren.

Aufgabe 4. Sei L eine endliche normale Erweiterung von $\mathbb{Q}$ mit
$$|\,\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})| = 8$$
und der Eigenschaft, dass jedes Element von $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ Ordnung 2 hat. Wie viele Unterkörper, die Grad 4 über $\mathbb{Q}$ haben, besitzt L?

Seien K ein Körper, $f \in K[X] \setminus K$ separabel, L Zerfällungskörper von f über K. Die *Galoisgruppe des Polynoms* f ist, per Definition,
$$\mathrm{Gal}(f) = \mathrm{Gal}(L/K).$$

Aufgabe 5. Bestimmen Sie die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(f)$ des Polynoms
$$f = (X^3 - 2)(X^2 - 3) \in \mathbb{Q}[X].$$