Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 2

Abgabe bis 10:00 Uhr am Mittwoch, den 24. Oktober 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Durchweg sei G eine Gruppe.

Aufgabe 1. Sei H eine Untergruppe von G vom Index 2. Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler von G ist.

Aufgabe 2. Zwei Elemente $h, h' \in G$ heißen *konjugiert*, wenn es ein $g \in G$ mit $h' = ghg^{-1}$ gibt.

(1) Zeigen Sie, dass Konjugiertheit von Elementen eine Äquivalenzrelation auf G ist. Ihre Äquivalenzklassen werden die *Konjugiertenklassen* von G genannt.
(2) Zeigen Sie: Eine Untergruppe $H \leq G$ ist genau dann Normalteiler von G, wenn H Vereinigung von Konjugiertenklassen von G ist.
(3) Bestimmen Sie die Konjugiertenklassen der symmetrischen Gruppe S_3.

Aufgabe 3. Seien H_1, H_2 Untergruppen von G mit $H_1 \subset H_2$, und H_1 habe endlichen Index in G. Zeigen Sie,

(1) dass auch H_2 endlichen Index in G hat und
(2) dass
$$|G : H_1| = |G : H_2| \cdot |H_2 : H_1|$$
gilt.

Aufgabe 4. Sei $G = \{e, a_1, a_2, a_3\}$ eine Gruppe der Ordnung 4, die nicht zyklisch ist, d.h. $G \neq \langle g \rangle$ für alle $g \in G$.

(1) Zeigen Sie, dass $a_i^2 = e$ gilt für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und dass, für jede Permutation i, j, k der Indizes 1, 2, 3, die Relation $a_i a_j = a_k$ gilt.
(2) Zeigen Sie, dass die Automorphismengruppe
$$\mathrm{Aut}(G) = \{\phi : G \to G \mid \phi \text{ Automorphismus von } G\}$$
zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist. (Die Gruppe G heißt *Kleinsche*[1] *Vierergruppe*, und wird in der Literatur oft mit V bezeichnet.)
(3) Bestimmen Sie eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4, die zu G isomorph ist.

[1] Felix Klein, 1849–1925