Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1

Übungsblatt 5

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 14. November 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Sei $d \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$ quadratfrei, d.h. nicht durch das Quadrat einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl teilbar. Betrachte

$$\mathbb{Q}(\sqrt{d}) = \{a + b\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

als Teilkörper[1] der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$. Definiere die *Normfunktion*

$$\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}(\sqrt{d})/\mathbb{Q}} : \mathbb{Q}(\sqrt{d}) \to \mathbb{Q}, \quad a + b\sqrt{d} \mapsto a^2 - db^2.$$

Setze nun

$$\omega_d = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{d}}{2}, & \text{falls } d \equiv 1 \bmod (4), \\ \sqrt{d} & \text{sonst} \end{cases}$$

und betrachte

$$\mathcal{O}_d = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\omega_d = \{a + b\omega_d \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

als Unterring von $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Dieser Integritätsring heißt der *Ring der ganzen Zahlen im Zahlkörper* $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.

Aufgabe 1. (1) Für $x = a + b\sqrt{d} \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ sei $\overline{x} := a - b\sqrt{d}$. Zeigen Sie, dass $\mathrm{N}(x) = x\overline{x}$ für jedes $x \in \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ gilt, und folgern Sie, dass N *multiplikativ* ist, d.h. dass

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}(\sqrt{d}) : \quad \mathrm{N}(xy) = \mathrm{N}(x)\,\mathrm{N}(y).$$

(2) Zeigen Sie, dass für $d \in \{-2, -1, 2, 3\}$ die Abbildung

$$n : \mathcal{O}_d \setminus \{0\} \to \mathbb{N}_0, \quad a + b\sqrt{d} \mapsto |a^2 - b^2 d|$$

eine euklidische Normabbildung ist, bezüglich derer der Ring $\mathcal{O}_d$ euklidisch ist.

(3) (Schwieriger:) Zeigen Sie die gleiche Aussage wie in (2) für

$$d \in \{-11, -7, -3, 5\}.$$

Tatsächlich gibt es nur endlich viele Werte von d, für die der Ring $\mathcal{O}_d$ euklidisch ist. Mehr erfahren Sie z.B. in den Abschnitten 14.7-14.9 von G. H. Hardy, E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th edition, Oxford Science Publications, 1997).

[1] $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ ist ein Beispiel eines *algebraischen Zahlkörpers*.

Aufgabe 2. Nach Aufgabe 1 ist der Ring

$$\mathcal{O}_{-1} = \mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \mathbb{Z} + i\mathbb{Z}$$

der *Gaußschen*[2] *Zahlen* euklidisch und daher – nach einem Satz aus der Vorlesung – ein Hauptidealring. (Hierbei bezeichnet natürlich i eine Wurzel von -1 in $\mathbb{C}$.) Finden Sie Erzeuger für die folgenden Ideale in $\mathcal{O}_{-1}$:

(1) $(1 + 3i, 5 + 10i)$,
(2) $(1 + 3i, 2 + 4i, 3 + 5i, \dots)$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathcal{O}_{-5}$ nicht euklidisch ist.

(Hinweis: Zeigen Sie, etwa unter Bezugnahme auf die Gleichung

$$3^2 = (2 - \sqrt{-5})(2 + \sqrt{-5}),$$

dass $\mathcal{O}_{-5}$ nicht einmal faktoriell ist.)

Aufgabe 4. Sei K ein Körper und $R = K[X][Y]/(X^2 - Y^3)$. Zeigen Sie, dass die Restklassen $\overline{X}$ und $\overline{Y}$ der Elemente X und Y in R, d.h. die Bilder der jeweiligen Elemente unter der natürlichen Reduktion $K[X][Y] \to R$, jeweils irreduzibel in R sind, nicht jedoch prim.

[2] Carl Friedrich Gauß, 1777–1855