Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 6

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 21. November 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Es seien R ein Ring (nicht notwendigerweise ein Integritätsbereich) und $S \subseteq R$ ein multiplikativer Untermonoid. Zeigen Sie, dass die Lokalisierung $S^{-1}R$ folgende *universelle Eigenschaft* hat:

Zu jedem Ringhomomorphismus $\phi : R \to R'$ mit $\phi(S) \subseteq (R')^*$ existiert genau ein Ringhomomorphismus $\overline{\phi} : S^{-1}R \to R'$ derart, dass $\phi = \overline{\phi} \circ \iota$. Hierbei bezeichne $\iota : R \to S^{-1}R$, $r \mapsto \frac{r}{1}$ die kanonische Abbildung.

Aufgabe 2. Sei $f(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom vom Grad n, und $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Nullstelle von f, d.h. $f(x) = 0$. Zeigen Sie, dass $a|a_0$ und $b|a_n$ gelten.

Aufgabe 3. Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^3 + X - 3$.

(1) Ist f irreduzibel, betrachtet als Element von $\mathbb{Z}[X]$?
(2) Ist f irreduzibel, betrachtet als Element von $\mathbb{F}_5[X]$?

Hierbei bezeichnet, wie gewohnt, $\mathbb{F}_5$ den Körper mit 5 Elementen. (Hinweis zu (1): Aufgabe 2 mag hilfreich sein.)

Aufgabe 4. Sei R ein Ring. Zeigen Sie, dass der Polynomring $R[X]$ genau dann ein Hauptidealring ist, wenn R ein Körper ist.