Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 7

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 28. November 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die reelle Zahl $\cos \frac{\pi}{n}$ algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 2. Sei p eine Primzahl und $\omega \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, etwa $\omega = e^{2\pi i/p}$. Bestimmen Sie das Minimalpolynom von ω über $\mathbb{Q}$ und den Grad $[\mathbb{Q}(\omega) : \mathbb{Q}]$.

Aufgabe 3. Fertigen Sie eine vollständige und irredundante Liste der irreduziblen Polynome über $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen, vom Grad kleiner als 5 an. Begründen Sie Ihre Angaben. Schließen Sie, dass

$$L = \mathbb{F}_2[X]/(X^4 + X + 1)$$

ein Erweiterungskörper von $\mathbb{F}_2$ ist. Was ist der Grad $[L : \mathbb{F}_2]$? Listen Sie alle Elemente von L auf, und bestimmen Sie alle Unterkörper von L.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie, ob das Polynom

$$f(X) = 3X^5 - 5X^3 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist. (Vorschlag: Betrachten Sie die Reduktion von f modulo 2, und benutzen Sie die Liste irreduzibler Polynome über $\mathbb{F}_2$ kleinen Grades, die Sie in Ihrer Bearbeitung von Aufgabe 3 erstellt haben.)