Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

Algebra 1
Übungsblatt 8

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 05. Dezember 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Seien K ein Körper, $f \in K[X]$ mit $\deg f > 0$ und L ein Zerfällungskörper von f. Zeigen Sie, dass

$$[L : K] \leq (\deg f)!$$

gilt.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f(X) = X^4 - 10X^2 + 1 \in \mathbb{Q}[X]$$

irreduzibel ist.

(Vorschlag: Benutzen Sie den "Satz über rationale Nullstellen" (Blatt 6, Aufgabe 2) um zu zeigen, dass f keine rationale Nullstelle hat. Zeigen Sie dann, dass f über $\mathbb{Q}$ nicht das Produkt zweier quadratischer Polynome ist.)

Aufgabe 3. Betrachten Sie die Erweiterung $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ von $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad $[L : \mathbb{Q}]$, sowie das Minimalpolynom des Elements

$$\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3} \in L.$$

Schließen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Bestimmen Sie α^{-1} explizit in Termen von $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$.

Aufgabe 4. Seien p eine Primzahl, K ein Körper und $a \in K \setminus K^p$ ein Element in K, das keine p-te Potenz eines Elements in K ist. Zeigen Sie, dass

$$X^p - a \in K[X]$$

irreduzibel ist.

(Hinweis: Führen Sie die Annahme zum Widerspruch, dass das Polynom auf nicht-triviale Weise über K faktorisiert. Faktorisieren Sie es dazu zuerst in einem Zerfällungskörper als ein Produkt von Linearfaktoren.)