Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2018/19

**Algebra 1**
Übungsblatt 9

Abgabe bis 12:00 Uhr am Mittwoch, den 19. Dezember 2018, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆ ⋆ ⋆

**Aufgabe 1.** Berechnen Sie die Grade der Zerfällungskörper über $\mathbb{Q}$ der folgenden Polynome in $\mathbb{Q}[X]$:

(1) $X^4 - 2$,
(2) $X^4 + 2$,
(3) $X^4 + X^2 + 1$,
(4) $X^6 - 4$.

Bitte begründen Sie Ihre Angaben.

**Aufgabe 2.** Seien $L/K$ eine Körpererweiterung in Charakteristik $p > 0$ und $a \in L$ ein über $K$ algebraisches Element. Das Element $a$ heißt *separabel*, wenn es Nullstelle eines separablen Polyms in $K[X]$ ist. Zeigen Sie: $a \in L$ ist genau dann separabel über $K$, wenn $K(a) = K(a^p)$ gilt.

**Aufgabe 3.** Seien $K$ ein Körper positiver Charakteristik $p$, $a \in K$ und

$$f = X^p - X - a \in K[X].$$

Sei ferner $L$ ein Erweiterungskörper von $K$, der eine Nullstelle von $f$ enthält. Zeigen Sie, dass $f$ über $L$ vollständig in Linearfaktoren zerfällt. Schließen Sie, dass $f$ über $K$ separabel ist. (Hinweis: Um die Zerfällungseigenschaft zu zeigen, mag Fermats Kleiner Satz hilfreich sein.)

**Aufgabe 4.** Sei $K$ ein Körper, $a \in K$ und $p$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass das Polynom

$$f = X^p - a \in K[X]$$

genau dann reduzibel ist, wenn es eine Nullstelle in $K$ besitzt. (Hinweis: Um zu zeigen, dass $f$ irreduzibel ist, wenn es keine Nullstelle in $K$ besitzt, reicht es, den Fall $\mathrm{char}(K) \neq p$ zu betrachten (warum?). In diesem Fall, betrachten Sie eine Faktorisierung von $f$ als Produkt von $p$ Linearfaktoren, in Termen der $p$-ten Einheitswurzeln, d.h. der $p$ Nullstellen des Polynoms $X^p - 1$ in einer geeigneten Körpererweiterung.)