Fakultät für Mathematik | Prof. Dr. Christopher Voll
Universität Bielefeld | Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 10

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 19. Dezember 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Seien K eine Gruppe und $g, h \in K$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung
$$\phi_g : K \to K, \quad x \mapsto g^{-1}xg$$
eine bijektive Abbildung ist.

(b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung von ϕ_g.

(c) Zeigen Sie: es existiert ein $k \in K$ derart, dass $\phi_g \circ \phi_h = \phi_k$ gilt.

(d) Zeigen Sie: Die Menge $\mathcal{K} = \{\phi_k \mid k \in K\}$ ist eine Gruppe under Verknüpfung von Abbildungen.

Aufgabe 2. Seien G eine Gruppe und $a, b \in G$.

(a) Bestimmen Sie das Inverse des Elements a^{-1}.

(b) Zeigen Sie: $a^{-1} = a$ genau dann, wenn $a^2 = e$.

(c) Bestimmen Sie das Inverse des Elements ab.

(d) Zeigen Sie: Die Gruppe G ist genau dann abelsch, wenn
$$(gh)^{-1} = g^{-1}h^{-1}$$
gilt für alle $g, h \in G$.

Aufgabe 3. Betrachten Sie die folgenden Vektoren v, $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$. Ist der Vektor v jeweils in der $\mathbb{R}$-linearen Hülle der v_1, v_2, v_3 enthalten? Stellen Sie v gegebenenfalls als $\mathbb{R}$-Linearkombination der v_1, v_2, v_3 dar. Begründen Sie in jedem Fall Ihre Antwort.

(a) $v = (4, -8, 0)$; $v_1 = (3, -2, 1)$, $v_2 = (-1, 3, 0)$, $v_3 = (5, -2, 3)$,

(b) $v = (0, 2, 3)$; $v_1 = (2, 3, -1)$, $v_2 = (-1, 2, 1)$, $v_3 = (4, -1, -3)$.

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Vektoren

(a) $(2, 0, -2), (2, -1, 1), (0, 2, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,

(b) $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, -1)$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$,

(c) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,

(d) $\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{11}$ im $\mathbb{Q}$-Vektorraum $\mathbb{R}$,

Stellen Sie in jedem Fall fest, ob die Vektoren ein Erzeugendensystem des jeweiligen Vektorraums bilden und ob sie linear unabhängig über dem jeweiligen Grundkörper sind.