Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

**Mathematik für Naturwissenschaften I**
Übungsblatt 13

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 23. Januar 2020, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

**Aufgabe 1.** Betrachten Sie die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit darstellender Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Standardeinheitsbasis des $\mathbb{R}^2$, d.h. $f(x) = Ax$.

(a) Bestimmen Sie Basen von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\mathrm{Im}(f)$ und verifizieren Sie den Dimensionssatz für lineare Abbildungen (Korollar 8.13 der Vorlesung) im vorliegenden Beispiel.
(b) Ist $f$ injektiv?
(c) Ist $f$ surjektiv?
(d) Ist $f$ ein Isomorphismus?

**Aufgabe 2.** Betrachten Sie die lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, die durch

$$f(e_1) = -e_1, \quad f(e_2) = e_2, \quad f(e_3) = e_1 - e_2 + e_3$$

definiert ist. Bestimmen Sie die darstellende Matrix bezüglich der Standardeinheitsbasis des $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $f(x)$ für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

**Aufgabe 3.** Betrachten Sie die Abbildung $f$ aus Aufgabe 1 und die Abbildung $g$ aus Aufgabe 4. Bestimmen Sie nun die darstellenden Matrizen der linearen Abbildungen

$$4f, \quad f+g, \quad g \circ f, \quad g \circ g$$

bezüglich der Standardeinheitsbasis des $\mathbb{R}^2$. Welche der angegebenen linearen Abbildungen sind Isomorphismen? Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

**Aufgabe 4.** Betrachten Sie die Geradenspiegelung $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an der Ursprungsgeraden, die durch den Punkt $e_1 - e_2$ geht.

(a) Zeigen Sie, dass $g$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung ist.
(b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $g$ bezüglich der Standardeinheitsbasis $\{e_1, e_2\}$ des $\mathbb{R}^2$.
(c) Zeigen Sie, dass $B := \{e_1 + e_2, -e_1 + e_2\}$ eine $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}^2$ ist.
(d) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von $g$ bezüglich $B$.