Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 2

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 24. Oktober 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \neq 0$ ist, per Definition, $\frac{x}{y} = xy^{-1}$, wobei y^{-1} das multiplikative Inverse von y ist, d.h. die (eindeutig bestimmte) reelle Zahl β mit der Eigenschaft, dass $y\beta = 1$.

Zeigen Sie, nur unter Verwendung der algebraischen Axiome der reellen Zahlen (Abschnitt 1.4.1 der Vorlesung), dass für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d \neq 0$ gilt

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

Aufgabe 2.

(a) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen $x \geq -1$ und alle natürlichen Zahlen n gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

(b) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt

$$\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 \geq xy.$$

Hinweis. @(a): Beweis durch vollständige Induktion nach n unter Verwendung der Anordnungsaxiome (Abschnitt 1.4.3 der Vorlesung). @(b): Formen Sie die Ungleichung $(x - y)^2 \geq 0$ um.

Aufgabe 3. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 3$ gilt $2n + 1 \leq n^2$.
(b) Für alle natürlichen Zahlen $n \neq 3$ gilt $n^2 \leq 2^n$.
(c) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.
(d) Für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ und alle $0 \leq k \leq n$ gilt

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \;\leq\; \frac{1}{k!}.$$

Hinweis. @(a)-(c): Vollständige Induktion nach n.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ gilt

(a)

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \;\leq\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!},$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \;<\; 3.$$

Hinweis. @(a): Binomischer Lehrsatz zusammen mit Aufgabe 3(d). @(b): Aufgabe 3(c) sowie Summenformel für die geometrische Reihe.