Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 4

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 07. November 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der nachstehenden Folgen und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

(a) $a_n = \frac{-n^3+n^2+n+1}{n^2+1000n+21}$.
(b) $a_n = \frac{4n^3+n+1}{7n^3+1}$.
(c) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^5$.
(d) $a_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$.

Hinweis. Teil (d): Beweisen Sie zunächst eine einfachere Formel für a_n.

Aufgabe 2. Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit Limes a. Zeigen Sie, dass die Folge $(b_n)_{n\geq 2}$, gegeben durch

$$b_n = \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}),$$

ebenfalls gegen a konvergiert.

Aufgabe 3. Sei $x > 0$ eine reelle Zahl. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch $a_0 := 1$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Zeigen Sie:

(a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ und $a_n^2 \geq x$.
(b) $(a_n)_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.
(c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq \frac{x}{a_1}$.
(d) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Für den Grenzwert a gilt $a > 0$ und
$$a^2 = x.$$

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass die reelle Folge mit den Gliedern

$$a_n = \sqrt{2} + (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

beschränkt ist. Bestimmen Sie das kleinstmögliche $k \in \mathbb{R}$ derart, dass $|a_n| \leq k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge (a_n)? Bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.