Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 5

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 14. November 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Betrachten Sie die rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gegeben durch

$$a_0 = 1, \quad a_n = 1 + \frac{1}{a_{n-1}} \text{ für } n \geq 1.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass

$$a_n = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}}$$

gilt, wobei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen[1] ist. Untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Hinweis. Für das Konvergenzverhalten verwenden Sie die explizite Formel für f_n aus Aufgabe 3 von Präsenzübungsblatt 1.

Aufgabe 2. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, rekursiv definiert durch

$$a_0 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

konvergent ist und berechnen Sie den Grenzwert.
Hinweis. Für die Konvergenz genügt es zu zeigen, dass die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt ist, z.B. durch die Zahl 2.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Folge

$$\left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

gegen die Eulersche Zahl $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konvergiert.
Hinweis. Zeigen Sie zunächst mithilfe von Aufgabe 2 (a) auf Übungsblatt 2, dass die Folge streng monoton wachsend ist. Aus Aufgabe 4 des gleichen Übungsblatts folgt dann (wie genau?), dass die Folge konvergiert und für den Limes gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

Es bleibt also nur die andere Ungleichung zu zeigen. Verwenden Sie dazu den Binomischen Lehrsatz.

[1] vgl. Präsenzübungsblatt 1, Aufgabe 3.

Aufgabe 4. Entscheiden Sie, ob die folgenden Reihen jeweils konvergieren.

(a)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

(b)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

(c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n},$$

(d)
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2n+1}.$$

Unbewertete Zusatzübung: Versuchen Sie, jeweils (!) *jedes* Konvergenzkriterium, das Sie kennen, anzuwenden.