Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

Mathematik für Naturwissenschaften I
Übungsblatt 6

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 21. November 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

Aufgabe 1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gegeben und $f : [a, b] \to [a, b]$ eine monoton wachsende, stetige Funktion. Zeigen Sie, dass, für beliebiges $x_0 \in [a, b]$ die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, die durch $x_{n+1} := f(x_n)$ definiert ist,

(a) monoton ist und
(b) gegen einen Grenzwert ξ konvergiert.

Zeigen Sie ferner, dass $f(\xi) = \xi$ gilt.

Aufgabe 2. Sei $M \neq \varnothing$ eine nach unten beschränkte nichtleere Teilmenge von $\mathbb{R}$. Aus der Vorlesung wissen Sie, dass eine größte untere Schranke $M_{\min} \in \mathbb{R}$ von M existiert. Konstruieren Sie eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in M (d.h. $a_n \in M$ für alle n), die gegen $M_{\min}$ konvergiert. Ist $M_{\min}$ immer ein Element von M?

Hinweis. $M_{\min}$ ist untere Schranke von M, aber für kein $\varepsilon > 0$ ist $M_{\min} + \varepsilon$ eine untere Schranke von M. Betrachten Sie $\varepsilon = 1/n$.

Aufgabe 3. Seien $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen und $D' := \{x \in D \mid g(x) \neq 0\}$.

(a) Zeigen Sie, dass der Quotient $f/g : D' \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.
(b) Zeigen Sie, ausgehend von der Definition der Stetigkeit, dass
  (a) für jedes $c \in \mathbb{R}$, die konstante Funktion $f(x) = c$ sowie
  (b) die Funktion $g(x) = x$ stetig auf $\mathbb{R}$ ist.
(c) Schließen Sie, dass die Funktion $h\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = 1/x$ für alle $0 < a < b$ stetig ist. Was passiert, wenn $a < 0$ und $b > 0$?

Aufgabe 4.

(a) Zeigen Sie, dass eine in 0 stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die die Funktionalgleichung
$$f(x + y) = f(x)f(y)$$
für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt, stetig ist.
(b) Zeigen Sie, für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq 1$, die Ungleichung
$$|\exp(x) - 1| \leq 2|x|.$$
Hinweis: $2 = \sum_{n=0}^{\infty}(1/2)^n$.
(c) Nutzen Sie diese Ungleichung, um die Stetigkeit der Exponentialfunktion im Nullpunkt $0 \in \mathbb{R}$ zu beweisen.
(d) Schließen Sie, dass die Exponentialfunktion stetig ist.
Hinweis: Teil **??**.