Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Prof. Dr. Christopher Voll
Wintersemester 2019/20

**Mathematik für Naturwissenschaften I**
Übungsblatt 7

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 28. November 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

⋆⋆⋆

**Aufgabe 1** (Doppelwinkelformel)**.** Die Potenzreihenformeln für $\cos(x)$ und $\sin(x)$ sind:

$$\cos(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

Zeigen Sie, unter Zuhilfenahme der Cauchy-Produktformel für Potenzreihen, dass

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

gilt.

*Hinweis.* Schreiben Sie die Potenzreihen in Standardform ($\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$). Für den Koeffizienten $c_k = \sum_{\ell=0}^{k} a_\ell b_{k-\ell}$ betrachten Sie getrennt die Fälle $k = 4j$, $4j+1$, $4j+2$, $4j+3$ ("Fallunterscheidung modulo 4").

**Aufgabe 2.** Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & \text{für } x \neq 0; \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

in jedem Punkt differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitung.

*Hinweis.* Im Punkt 0 müssen Sie den Differentialquotienten berechnen. Die Sinusfunktion ist beschränkt mit $|\sin(x)| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie, dass für $x > 0$ gilt $\log'(x) = \frac{1}{x}$. Folgern Sie daraus, dass gilt

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x \neq 0}} \frac{\log(1+x)}{x} = 1.$$

Beweisen Sie damit erneut, dass gilt $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

*Hinweis.* Letzter Teil: Betrachten Sie speziell $x = 1/n$ und verwenden Sie die Stetigkeit der Exponentialfunktion.

**Aufgabe 4.** Seien $f, g\colon D \longrightarrow \mathbb{R}$ $n$-mal differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die allgemeine Produktregel

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

für die $n$-te Ableitung der Produktfunktion $fg$.

*Hinweis.* Vollständige Induktion nach $n$.