

**Mathematik für Naturwissenschaften I**  
Übungsblatt 8

Abgabe bis 10:00 Uhr am Donnerstag, den 05. Dezember 2019, im Postfach Ihrer Tutorin bzw. Ihres Tutors.

\*\*\*

**Aufgabe 1.** Prüfen Sie bei jedem der folgenden Grenzwertausdrücke, ob eine der Regeln von de l'Hôpital Anwendung findet. Benutzen Sie sie gegebenenfalls, um den Grenzwert zu bestimmen.

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x + 1}.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2x} + x^2}{e^x + 7x + 8}.$$

(d)

$$\lim_{x \searrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{1}{\log(x)} \right).$$

**Aufgabe 2.** Bestimmen Sie die Taylor-Reihen der folgenden Funktionen:

(a)  $3x^2 - 6x + 5$  um  $x_0 = 1$ .

(b)  $x^3 \sin(x)$  um  $x_0 = 0$ .

(c)  $1/(1-x)$  um  $x_0 = 0$ .

(d)  $\cos(x)^2$  um  $x_0 = 0$ .

*Hinweis:* Teil (d): Doppelwinkelformel.

**Aufgabe 3.** Seien  $I$  ein reelles Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion. Zeigen Sie: Wenn  $f'(x) = 0$  für alle  $x \in I$  gilt, dann ist  $f$  konstant.

*Hinweis:* 1. Mittelwertsatz.

**Aufgabe 4.** Sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine differenzierbare Funktion, die die Differentialgleichung  $f' = f$  erfüllt und für die  $f(0) = 1$  gilt. Zeigen Sie, dass dann  $f(x) = e^x$  gilt.

*Hinweis:* Versuchen Sie zuerst, etwa mittels Aufgabe 3, zu zeigen, dass die Funktion  $g(x) := f(x)e^{-x}$  konstant ist.