Vertiefung Elementare Zahlentheorie

WS 2010/2011, Klausur 1, 4.2.2011

Aufgabe 1. Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus zur Berechnung von $d = \mathrm{ggT}(1099, 210)$ und einer linearen Darstellung $d = x \cdot 1099 + y \cdot 210$.

Aufgabe 2. Bestimmen Sie alle Lösungen des Systems linearer Kongruenzen:

$$x \equiv 2 \pmod 3, \quad x \equiv 3 \pmod 4, \quad x \equiv 4 \pmod 5.$$

Aufgabe 3. (a) Berechnen Sie die Reste von 234^{234} bei Division durch 11 und von 100^{100} bei Division durch 7.

(b) Bestimmen Sie die Endziffer in der Dezimaldarstellung von 333^{999}.

Aufgabe 4. Sei p eine Primzahl $\neq 2$. Beweisen Sie:

$$(((p-1)/2)!)^2 \equiv (-1)^{(p+1)/2} \pmod p.$$

Aufgabe 5. Berechnen Sie die folgenden Werte der Eulerschen ϕ-Funktion:

(a) $\phi(60)$, (b) $\phi(81)$, (c) $\phi(1000)$, (d) $\phi(1111)$.

Aufgabe 6. (a) Erstellen Sie eine Index-Tabelle für die Primzahl 11 und die Primitivwurzel 2.

(b) Verwenden Sie die Index-Tabelle zur Bestimmung aller Lösungen der Kongruenz $x^6 \equiv 5 \pmod{11}$.

Aufgabe 7. Berechnen Sie die folgenden Legendre-Symbole:

(a) $(\frac{120}{179})$, (b) $(\frac{121}{181})$, (c) $(\frac{122}{191})$.

Aufgabe 8. Berechnen Sie alle primitiven pythagoreischen Tripel (x, y, z) mit

(a) $z = 25$, (b) $z = 27$, (c) $z = 29$.

Aufgabe 9. Stellen Sie die Zahlen

(a) 106, (b) $1073 = 29 \cdot 37$, (c) $11^4 \cdot 13^3 \cdot 17^2 \cdot 19$

als Summen von zwei Quadraten dar; sollte eine solche Darstellung nicht möglich sein, geben Sie eine Begründung.

Aufgabe 10. Seien a und b ganze Zahlen. Beweisen Sie: Ist p ein ungerader Primteiler von $a^2 + b^2$, aber kein gemeinsamer Teiler von a und b, dann ist $p \equiv 1 \pmod 4$.