

Vertiefung Elementare Zahlentheorie

WS 2010/2011, Wiederholungsblatt 2

Die folgenden Aufgaben sollen nur zur Selbstkontrolle dienen; Lösungen müssen nicht abgegeben werden.

Aufgabe 31. Geben Sie die Definitionen eines pythagoreischen Tripels und eines primitiven pythagoreischen Tripels.

Aufgabe 32. Beschreiben Sie alle primitiven pythagoreischen Tripel.

Aufgabe 33. Berechnen Sie alle primitiven pythagoreischen Tripel (x, y, z) mit $20 < z < 30$.

Aufgabe 34. Sei (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Tripel. Zeigen Sie: Genau eine der Zahlen x und y ist gerade; z ist ungerade; ist x gerade, dann ist x durch 4 teilbar.

Aufgabe 35. Sei (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Tripel. Zeigen Sie: Genau eine der Zahlen x und y ist durch 3 teilbar; z ist nicht durch 3 teilbar.

Aufgabe 36. Sei (x, y, z) ein primitives pythagoreisches Tripel. Zeigen Sie: Genau eine der Zahlen x , y und z ist durch 5 teilbar.

Aufgabe 37. Zeigen Sie: Sind a und b teilerfremde ganze Zahlen > 0 derart, dass ab ein Quadrat ist, dann sind schon a und b Quadrate.

Aufgabe 38. Formulieren Sie den Zwei-Quadrate-Satz.

Aufgabe 39. Welche der folgenden Zahlen sind Summen von zwei Quadraten?
1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111

Aufgabe 40. Schreiben Sie alle Primzahlen < 50 , soweit möglich, als Summen von zwei Quadraten.

Aufgabe 41. Schreiben Sie $260 = 2^2 \cdot 5 \cdot 13$, $986 = 2 \cdot 17 \cdot 29$ und $1517 = 37 \cdot 41$ als Summen von zwei Quadraten.

Aufgabe 42. Seien a und b ganze Zahlen. Zeigen Sie: Ist p ein ungerader Primteiler von $a^2 + b^2$, aber kein gemeinsamer Teiler von a und b , dann gilt $p \equiv 1 \pmod{4}$.

Aufgabe 43. Formulieren Sie den Drei-Quadrate-Satz.

Aufgabe 44. Zeigen Sie direkt (d.h. ohne Verwendung des Drei-Quadrate-Satzes): Eine ganze Zahl der Form $8k + 7$ mit $k \geq 0$ ist nicht Summe von drei Quadraten.

Aufgabe 45. Formulieren Sie den Vier-Quadrate-Satz.