Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Dienstag 02.11.2021 12:00

# AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE BLATT 3

**Aufgabe 1.** ($1+1(+2)$) Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen in den natürlichen Zahlen, das heißt alle $x, y \in \mathbb{N}$, so dass

$$(a)\ 62x + 105y = 651, \quad (b)\ 12x - 501y = 33.$$

Bonuspunkte (in Klammern): Überlege, für welche $a, b, c \in \mathbb{Z}$ man nur endlich viele $x, y \in \mathbb{N}$ mit $ax + by = c$ findet.

**Aufgabe 2.** ($2 + 2 + 2$) Es seien $a, b, c$ drei ganze Zahlen und $d = \mathrm{ggT}(a, b, c)$ der größte gemeinsame Teiler.

(1) Zeige $d = \mathrm{ggT}(\mathrm{ggT}(a, b), c)$.
(2) Berechne $d = \mathrm{ggT}(260, 910, 364)$ und finde $x, y, z \in \mathbb{Z}$ mit

$$d = 260x + 910y + 364z.$$

(3) Finde eine natürliche Zahl $d$, sodass

$$d\mathbb{Z} = 231\mathbb{Z} + 198\mathbb{Z} + 143\mathbb{Z}$$

**Aufgabe 3.** ($2 + 2$)

(1) Das Sieb des Eratosthenes nimmt eine Liste $2, ..., n$ von natürlichen Zahlen. Angefangen mit der kleinsten Zahl 2 werden alle Zahlen, die größer als und durch 2 teilbar sind durchgestrichen. Dann wird die nächstkleine nicht gestrichene Zahl 3 genommen und alle größeren durch 3 teilbaren Zahlen gestrichen, etc.. Wenn man mit diesem Verfahren alle Zahlen bis $n$ durchgegangen ist, bleiben nur noch die Primzahlen stehen.
Wende das Sieb des Eratosthenes auf die ganzen Zahlen $2, ..., 200$ an.
(Benutze die Vorlage auf der zweiten Seite.)
(2) Es sei $n$ eine zusammengesetzte Zahl. Zeige, dass der kleinste Primteiler von $n$ kleiner gleich $\sqrt{n}$ ist.
Folgere, dass es beim Sieb des E. für $2, ..., n$ ausreicht, nur alle natürlichen Zahlen kleiner gleich $\sqrt{n}$ mit dem Algorithmus durchzugehen (i.e. die bis dahin noch nicht gestrichenen Zahlen sind alles Primzahlen).

**Aufgabe 4.** ($1 + 1 + 2$) Begründe die folgenden Aussagen.

(1) Für eine ganze Zahl $a$ und für alle Primzahlen $p$ gilt, $e_p(a^n) = ne_p(a)$ .
(2) Für zwei ganze Zahlen $a$ und $b$ gilt $(ggT(a, b))^n = ggT(a^n, b^n)$.
(3) Sei $n$ eine natürliche Zahl. Die natürliche Zahl $n^5 - n$ ist durch 5 teilbar.

**Hinweis zu Augabe 4:** Für (1) hilft Satz 10. Für (2) benutzt man (1) und einen anderen Teil von Satz 10. Wie verhält sich das Minimum bei Multiplikation mit natürlichen Zahlen? Für (3) sollte vollständige Induktion benutzt werden. Dabei muss der Term $(n+1)^5$ ausmultipliziert werden.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |
| 101 | 102 | 103 | 104 | 105 | 106 | 107 | 108 | 109 | 110 |
| 111 | 112 | 113 | 114 | 115 | 116 | 117 | 118 | 119 | 120 |
| 121 | 122 | 123 | 124 | 125 | 126 | 127 | 128 | 129 | 130 |
| 131 | 132 | 133 | 134 | 135 | 136 | 137 | 138 | 139 | 140 |
| 141 | 142 | 143 | 144 | 145 | 146 | 147 | 148 | 149 | 150 |
| 151 | 152 | 153 | 154 | 155 | 156 | 157 | 158 | 159 | 160 |
| 161 | 162 | 163 | 164 | 165 | 166 | 167 | 168 | 169 | 170 |
| 171 | 172 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 180 |
| 181 | 182 | 183 | 184 | 185 | 186 | 187 | 188 | 189 | 190 |
| 191 | 192 | 193 | 194 | 195 | 196 | 197 | 198 | 199 | 200 |