Universität Bielefeld WS 2021/2022
Lehrender: Prof. Dr. William Crawley-Boevey
Tutorien: Dr. Julia Sauter und Vincent Klinksiek
Abgabe: Montag 08.11.2021 12:00

AUSGEWÄHLTE KAPITEL: ELEMENTARE ZAHLENTHEORIE
BLATT 4

Aufgabe 1. ($2 + 2$) Berechne den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache mit Hilfe der Primfaktorzerlegung für die folgenden Zahlen $a, b \in \mathbb{N}$.

(1) $a = 1848, b = 660$,
(2) $a = 9^7 \cdot 40^{432} \cdot 42^{12}, b = 45^{57} \cdot 22^{55} \cdot 39^{678}$.

Aufgabe 2. ($1 + 2$) Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen in den natürlichen Zahlen, das heißt alle $x, y \in \mathbb{N}$, so dass

$$(a)\ 3x + 11y = 100, \quad (b)\ 238x + 266y = 7000.$$

Hinweis: Achtung hier ist wieder nach allen Lösungen in $\mathbb{N}$ gefragt. Dafür berechnet man die Lösungen in $\mathbb{Z}$ mithilfe der Vorlesung und überlegt dann welche dieser Lösungen größer gleich 0 sind.

Aufgabe 3. ($1 + 2 + 2$) Es sei $m \in \mathbb{N}$. Finde $x \in \{0, \ldots, m-1\}$, so dass gilt:

(1) $23^{3145672} \equiv x \pmod{m}$ mit $m = 11$.
(2) $65^{2016} \equiv x \pmod{m}$ mit $m = 12$.
(3) $64^{2016} + (-11)^{2016} \equiv x \pmod{m}$ mit $m = 10$.

Aufgabe 4. ($1 + 2 + 1$) Begründe die folgenden Aussagen:

(1) Es gibt ein primitives pythagoreisches Tripel (a, b, c) mit $c = 89$.
(2) Es sei (a, b, c) ein pythagoreisches Tripel. Zeige, dass die folgenden beiden Aussagen äquivalent sind:
  (i) $c - b = 1$,
  (ii) Es gibt ein $d \in \mathbb{N}$, so dass gilt $a = 2d + 1, b = 2d^2 + 2d, c = 2d^2 + 2d + 1$.
(3) Für jede ungerade Zahl s gibt es ein pythagoreischen Tripels (s, t, u) mit $u - t = 1$.

Hinweis: Bei (1) sollte man Satz 12 benutzen. Für Teil (2) benötigt man Satz 12 **nicht**. Für den Aufgabenteil (3) kann man den Aufgabenteil (2) verwenden.