Algebra I
1. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 20.10.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 1.1. (1+1+1+1) Sei G eine Gruppe. Angenommen, die Elemente $a, b \in G$ kommutieren.

(i) Zeigen Sie durch Induktion, dass a^n und b für alle natürlichen Zahlen n kommutieren.

(ii) Zeigen Sie, dass a^n und b^m für alle natürlichen Zahlen n, m kommutieren.

(iii) Zeigen Sie, dass a und b^{-1} kommutieren.

(iv) Leiten Sie ab, dass a^n und b^m für alle $n, m \in \mathbb{Z}$ kommutieren.

Aufgabe 1.2. (2+2) Sei G die Gruppe aller Drehungen eines regulären Sechsecks, also $G = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5\}$, wobei σ ist eine Drehung um den Winkel $2\pi/6$.

(i) Schreiben Sie die Verknüpfungstabelle von G auf.

(ii) Finden Sie alle Untergruppen von G.

Aufgabe 1.3. (1+1+2) Die Diedergruppe D_4 ist die Symmetriegruppe eines Quadrats AB-CD. Sei σ die Drehung um den Winkel $\pi/2$ mit $\sigma(A) = B$. Sei τ die Spiegelung mit der Achse AC, also $\tau(A) = A$. Dann ist $D_4 = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2, \tau\sigma^3\}$.

(i) Die Elemente $\tau\sigma$, $\tau\sigma^2, \tau\sigma^3$ sind Spiegelungen. Was sind ihre Achsen?

(ii) Schreiben Sie die Verknüpfungstabelle von D_4 auf.

(iii) Finden Sie alle Untergruppen von D_4.

Aufgabe 1.4. (2+2) Sei G eine Gruppe (mit multiplikativer Notation).

(i) Sei H eine Teilmenge von G. Zeigen Sie, dass H genau dann eine Untergruppe von G ist, wenn (a) H nicht leer ist und (b) $xy^{-1} \in H \ \forall\ x, y \in H$.

(ii) Sei $H \leq G$. Zeigen Sie: wenn K eine Linksnebenklasse von H in G ist, dann ist $\{k^{-1} : k \in K\}$ eine Rechtsnebenklasse von H. Zeigen Sie, dass dies eine bijektive Abbildung $G/H \to H\backslash G$ definiert, von der Menge der Linksnebenklassen von H zur Menge der Rechtsnebenklassen von H.