# Algebra I
# 3. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 03.11.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

**Aufgabe 3.1.** (2+2) (i) Finden Sie mithilfe des euklidischen Algorithmus $\text{ggT}(2850, 1254)$ und schreiben Sie es in der Form $2850x + 1254y$ mit $x, y \in \mathbb{Z}$.

(ii) Finden Sie alle möglichen $a \in \mathbb{Z}$, so dass $(\mathbb{Z}4 + \mathbb{Z}a) \cap \mathbb{Z}9 = \mathbb{Z}18$.

**Aufgabe 3.2.** (1+1+2) Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation.

(i) Zeigen Sie, dass $\text{ord}(\sigma) = k$ gilt, wenn $\sigma = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_k)$ ein $k$-Zyklus ist.

(ii) Wenn $\sigma$ als Produkt disjunkter Zyklen geschrieben wird, zeigen Sie, dass $\text{ord}(\sigma)$ das kleinste gemeinsame Vielfache der Größen der Zyklen ist.

(iii) Finden Sie die möglichen Ordnungen der Elemente von $S_4$ und $S_7$.

**Aufgabe 3.3.** (2+2) (i) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}4$ und die Kleinsche Vierergruppe $V$ die einzigen Gruppen der Ordnung 4 bis zum Isomorphismus sind.

(ii) Zeigen Sie, dass $A_4$ und $D_6$ nicht isomorph sind.

**Aufgabe 3.4.** (1+1+1+1) Der *Kommutator* von $a, b \in G$ ist definiert als $[a, b] := aba^{-1}b^{-1}$. Die *Kommutatorgruppe* (oder abgeleitete Untergruppe) von $G$ ist die Untergruppe

$$G' = \langle \{[a, b] : a, b \in G\} \rangle$$

von $G$. Zeigen Sie Folgendes:

(i) $a$ und $b$ kommutieren genau dann, wenn $[a, b] = e$.

(ii) $[a, b]^{-1} = [b, a]$ und $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, gbg^{-1}]$ für $g \in G$.

(iii) $G' \trianglelefteq G$ und $G/G'$ ist abelsch.

(iv) Wenn $N \trianglelefteq G$ und $G/N$ abelsch ist, dann ist $G' \subseteq N$.

(Daher ist $G'$ die eindeutige kleinste Normalteiler von $G$, so dass die Faktorgruppe abelsch ist.)