# Algebra I
# 5. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 17.11.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

**Aufgabe 5.1.** (2+2) Zeigen Sie in jedem der folgenden Fälle, dass es keine einfache Gruppe $G$ der Ordnung $n$ gibt.

(i) $n = 100$. [Hinweis. Zeigen Sie, dass für eine Primzahl $p$ die Anzahl $n_p$ der Sylow $p$-Untergruppen gleich 1 ist. Erklären Sie, warum das hilft.]

(ii) $n = 300$. [Hinweis: Zeigen Sie, dass $G$ sechs 5-Sylowuntergruppen hat. Die Aktion auf sie durch Konjugation ergibt einen nicht trivialen Homomorphismus $G \to S_6$. Zeigen Sie, dass dies unmöglich ist.]

**Aufgabe 5.2.** (1+1+1+1) Sei $G$ eine Gruppe der Ordnung 10. Nach Cauchy enthält sie Elemente $\sigma$ der Ordnung 5 und $\tau$ der Ordnung 6.

(i) Erklären Sie, warum die Untergruppe $\langle\sigma\rangle = \{e, \sigma, \sigma^2, \sigma^3, \sigma^4\}$ ein Normalteiler ist. Daraus folgt, dass $\tau\sigma\tau^{-1} = \sigma^i$ für ein $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Fälle $i = 2$ und $i = 3$ nicht möglich sind.

(iii) Zeigen Sie, dass $G$ zyklisch ist, wenn $i = 1$.

(iv) Leiten Sie ab, dass jede Gruppe der Ordnung 10 entweder zyklisch oder isomorph zur Diedergruppe $D_5$ ist.

**Aufgabe 5.3.** (1+1+2) Seien $H \leq G$ und $N \trianglelefteq G$. Nach dem ersten Isomorphiesatz ist $HN := \{hn : h \in H, n \in N\}$ eine Untergruppe von $G$. Zeigen Sie Folgendes.

(i) Wenn auch $H \trianglelefteq G$, dann $HN \trianglelefteq G$.

(ii) (Modulares Gesetz von Dedekind) Wenn $K \leq H$, dann $K(H \cap N) = H \cap KN$.

(iii) Wenn $K \trianglelefteq H$, dann $KN \trianglelefteq HN$ und $HN/KN \cong H/(K(H \cap N))$.

Mehr...

**Aufgabe 5.4.** (2+2) Eine endliche Gruppe $G$ heißt *auflösbar* (Englisch: soluble, Amerikanisch: solvable), falls es eine Kette

$$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_n = G$$

von Untergruppen gibt, so dass $G_{i-1} \trianglelefteq G_i$ ein Normalteiler mit abelschen Faktorgruppe $G_i/G_{i+1}$ für $1 \leq i \leq n$ ist. Zeigen Sie:

(i) Wenn $G$ auflösbar ist und $H \leq G$, dann ist $H$ auflösbar (Hinweis: Betrachten Sie $H \cap G_i$.)

(ii) Wenn $G$ auflösbar ist und $N \trianglelefteq G$, dann ist $G/N$ auflösbar (Hinweis: Betrachten Sie $G_iN/N$.)