Algebra I
8. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 08.12.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Aufgabe 8.1. (1+1+1+1) Sei $\omega = e^{2\pi i/3} = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{-3}) \in \mathbb{C}$.

(i) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[\omega] = \{x + y\omega : x, y \in \mathbb{Z}\}$. Dies ist der Ring der Eisenstein-Zahlen.

(ii) Zeichnen Sie ein Bild, das die Positionen der Eisenstein-Zahlen in der komplexen Ebene zeigt.

(iii) Zeigen Sie: Für alle $z \in \mathbb{C}$ gibt es $q \in \mathbb{Z}[\omega]$, so dass $|z - q| < 1$.

(iv) Zeigen Sie: $\mathbb{Z}[\omega]$ ist ein euklidischer Ring bezüglich $\sigma(a) = |a|^2$.

Aufgabe 8.2. (1+1+1+1)

(i) Zeigen Sie: Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ hat genau zwei Einheiten, und der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ hat unendlich viele Einheiten.

(ii) Zeigen Sie: $1 \pm \sqrt{-2}$ und 5 sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(iii) Schreiben Sie 30 als Produkt einer Einheit und irreduzibler Elemente in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

(iv) Zeigen Sie: Die Elemente $1 \pm \sqrt{-7}$ und 2 sind irreduzibel in $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$. Schreiben Sie also 8 auf zwei grundsätzlich unterschiedliche Arten als Produkt von Irreduziblen.

Sei a und b Elemente in einem Integritätsbereich R. Ein Element $g \in R$ heißt *größter gemeinsamer Teiler* von a und b, falls $g|a$ und $g|b$ und aus $d|a$ und $d|b$ folgt $d|g$. Wenn es existiert, ist es bis zur Multiplikation mit einer Einheit eindeutig bestimmt und wird mit $\mathrm{ggT}(a, b)$ bezeichnet. Größte gemeinsame Teiler existieren für faktorielle Ringe. In einem euklidischen Ring kann man sie mit dem euklidischen Algorithmus berechnen.

Aufgabe 8.3. (2+2)

(i) Sei $a = 36 + 6\sqrt{-2}$ und $b = 8 + 7\sqrt{-2}$ im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$. Finden Sie $q, r \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ mit $a = qb + r$ und $N(r) < N(b)$. [Hinweis. Schreiben Sie a/b in der Form $x + y\sqrt{-2}$ mit $x, y \in \mathbb{Q}$ und finden Sie dann ganze Zahlen, die möglichst nahe an x und y liegen.]

(ii) Verwenden Sie den euklidischen Algorithmus, um $\mathrm{ggT}(a, b)$ zu finden.

Mehr...

Aufgabe 8.4. (1+1+2) Zeigen Sie wie folgt, dass die Elemente 8 und $4 + 4\sqrt{-7}$ kein ggT im Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$ haben.

(i) Nehmen Sie an, dass g ein ggT für 8 und $4 + 4\sqrt{-7}$ ist. Zeigen Sie: $g = 4d$ für ein $d \in \mathbb{Z}[\sqrt{-7}]$, und d ist ein gemeinsamer Teiler von $1 + \sqrt{-7}$ und 2.

(ii) Zeigen Sie: Jeder gemeinsame Teiler von $1 + \sqrt{-7}$ und 2 ist eine Einheit, sodass d eine Einheit ist und g ein Assoziierter von 4 ist.

(iii) Zeigen Sie: $1 + \sqrt{-7}$ ist ein gemeinsamer Teiler von 8 und $4 + 4\sqrt{-7}$, teilt aber nicht g.