Algebra I
13. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 26.01.24 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors
[Lars Bügemannskemper: 235, Benjamin Wagner: 236]

Jede Aufgabe auf der Klausur ist 8 Punkte wert, also maximal 48 Punkte.

Allerdings werden die Noten auf der Probeklausur so skaliert, dass die Höchstpunktzahl 16 beträgt, genau wie bei den anderen Übungsblättern.

Algebra I

William Crawley-Boevey

Universität Bielefeld, WS 23/24

Probeklausur

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Unterschrift:

1	2	3	4	5	6	Σ	Gesamt	Note

Zugelassene Hilfsmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes DIN-A4-Blatt, ein nicht programmierbarer Taschenrechner sowie Schreibutensilien. Bitte verwenden Sie weder Blei- noch Rotstift.

Veröffentlichung des Klausurergebnisses: Im Lernraum sobald die Korrektur beendet ist.

Falls Sie im WS 23/24 nicht in den Übungen zur Algebra I mindestens 50 Prozent der Gesamtpunktzahl erreicht haben oder nicht zweimal eine Aufgabe vorgerechnet haben, wird ihr Klausur nicht bewertet.

Aufgabe 1. (2+3+3 Punkte). Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie:

(i) Wenn K eine Linksnebenklasse von H in G ist, dann ist $\{x^{-1} : x \in K\}$ eine Rechtsnebenklasse von H in G.
(ii) Ist $[G : H] = 2$, so ist H ein Normalteiler von G.
(iii) Ist H ein Normalteiler der Ordnung 2, so liegt H im Zentrum von G.

Aufgabe 2. (3+2+3 Punkte) Sei G eine Gruppe der Ordnung 170.

(i) Geben Sie die Aussage des dritten Sylow-Satzes bezüglich der Anzahl der p-Sylowuntergruppen einer endlichen Gruppe an.
(ii) Bestimmen Sie die Anzahl der 17-Sylowuntergruppen von G.
(iii) Zeigen Sie: G hat Untergruppen von Ordnung 34 und 85.

Aufgabe 3. (4+4 Punkte). Sei R ein kommutativer Ring. Ein Element $r \in R$ heißt nilpotent, falls es ein $n > 0$ gibt mit $r^n = 0$. Zeigen Sie:

(i) Die Menge $N = \{r \in R : r \text{ ist nilpotent}\}$ ist ein Ideal in R.
(ii) N ist im Schnitt aller Primideale von R enthalten.

Aufgabe 4. (2+3+3 Punkte).

(i) Definieren Sie die Begriffe 'irreduzibel' und 'prim' für Elemente in einem Integritätsbereich.
(ii) Zeigen Sie: Jedes Primelement ist irreduzibel.
(iii) Zeigen Sie: der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-31}]$ ist nicht faktoriell. [Hinweis: Betrachten Sie etwa Zerlegungen der Zahl 32 in diesem Ring.]

Aufgabe 5. (2+3+3 Punkte). Sei L/K eine Körpererweiterung, sei $\alpha \in L$ und sei

$$\beta = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{3} \in \mathbb{R}.$$

(i) Definieren Sie, was es bedeutet, dass α algebraisch über K ist, und definieren Sie das Minimalpolynom von α über K.
(ii) Zeigen Sie, dass β algebraisch über $\mathbb{Q}$ ist, und finden Sie das Minimalpolynom.
(iii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subseteq \mathbb{Q}(\beta)$, und berechnen Sie $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}(\sqrt{3})]$.

Aufgabe 6. (3 + 3 + 2 Punkte). Sei α eine der drei reellen Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^3 - 3X - 1 \in \mathbb{Q}[X]$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie:

(i) $f(X)$ ist das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}$.
(ii) Es gibt $\sigma \in \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ mit $\sigma(\alpha) = 2 - \alpha^2$.
(iii) K ist ein Zerfällungskörper von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$.