Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 14.04.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 1.1. (2+1+1) Sei V ein Vektorraum über $K = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und sei $\langle -, - \rangle : V \times V \to K$ ein Skalarprodukt.

(i) Zeigen Sie, dass $\langle -, - \rangle$ semilinear im zweiten Argument ist, d.h. $\langle v, w+w' \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v, w' \rangle$ und $\langle v, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, w \rangle$ für $v, w, w' \in V$ und $\lambda \in K$.
(ii) Zeigen Sie, dass $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|$ für $v \in V$ und $\lambda \in K$.
(iii) Zeigen Sie die folgende Version des Satzes des Pythagoras. Wenn v und w orthogonal sind, dann ist $\|v + w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

Aufgabe 1.2. (2+2) Zeigen Sie die Polarisationsformeln, die zeigen, dass die Norm das Skalarprodukt bestimmt:

(i) Im Fall $K = \mathbb{R}$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2)$.
(ii) Im Fall $K = \mathbb{C}$ gilt $\langle v, w \rangle = \frac{1}{4}(\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2) + \frac{i}{4}(\|v + iw\|^2 - \|v - iw\|^2)$.

Aufgabe 1.3. (2+2) Sei $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(v, w) \mapsto v \times w$ das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$.

(i) Sei $v = (1, 2, 3)$ und $w = (-1, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$. Berechnen Sie $\|v\|$, $\|w\|$, $\langle v, w \rangle$, $v \times w$ und $\|v \times w\|$. Überprüfen Sie, dass $\langle v, w \rangle^2 + \|v \times w\|^2 = \|v\|^2 . \|w\|^2$.
(ii) Zeigen Sie die Graßmannsche Identität: $u \times (v \times w) = \langle u, w \rangle v - \langle u, v \rangle w$ für alle $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 1.4. (2+2) Gegeben eine symmetrische Matrix $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ betrachten wir die Abbildung $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\langle v, w \rangle := v^{\mathrm{T}} A \, w = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_i w_j$$

Sie hat konjugierte Symmetrie (da $K = \mathbb{R}$, ist dies eigentlich Symmetrie) und sie ist linear im ersten Argument. Das Standardskalarprodukt ist der Fall $A = I$.

(i) Zeigen Sie im Fall

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix},$$

dass $\langle -, - \rangle$ genau dann positive definit (also ein Skalarprodukt) ist, wenn $a > 0$ und $\det(A) > 0$.

Mehr...

(ii) Zeigen Sie im Fall

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

dass $\langle -, - \rangle$ positiv definit ist. [Hinweis: Schreiben Sie $\langle v, v \rangle$ als Summe von Quadraten wie $(v_1 - v_2)^2$.] (Diese Matrix ist ein Cartan-Matrix, die einem Wurzelsystem vom Typ A_3 zugeordnet ist und dem Dynkin-Diagramm $\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet\!\!-\!\!\!-\!\!\bullet$ entspricht. Sehen Sie Wikipedia.)