Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 21.04.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 2.1. (2+2)

(i) Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei W der Unterraum mit der Basis (w_1, w_2, w_3), wobei $w_1 = (1, 0, 1, 2)$, $w_2 = (2, 1, 0, 2)$ und $w_3 = (1, -1, 0, 1)$. Verwenden Sie das Gram-Schmidt-Verfahren, um eine orthonormale Basis für W zu finden.

(ii) Betrachten Sie $\mathbb{C}^3$ mit dem Standard-Skalarprodukt. Finden Sie eine orthonormale Basis des Unterraums $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : x_1 - x_2 + ix_3 = 0\}$ von $\mathbb{C}^3$.

Aufgabe 2.2. (4) Schreiben Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

als Produkt $A = QR$, wobei Q eine Matrix mit orthonormalen Spalten (in $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt) und R eine obere Dreiecksmatrix ist.

Aufgabe 2.3. (2) Sei V ein Skalarproduktraum über K und seien $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(v'_1, \ldots, v'_n)$ linear unabhängige n-Tupel in V mit Gram-Matrizen G bzw. G'. Angenommen, es gibt eine invertierbare Matrix $P = (p_{ij}) \in M_n(K)$, so dass

$$v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$$

für alle j. Zeigen Sie, dass $G' = P^{\mathrm{T}}\, G\, \overline{P}$.

[Wenn $\dim V = n$, dann ist P die Basiswechselmatrix von der Basis $B' = (v'_1, \ldots, v'_n)$ von V zur Basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ von V (sehen Sie §5.2)].

Mehr...

Aufgabe 2.4. (2+2+2) Sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum von Polynomen mit reellen Koeffizienten und sei $\langle -, - \rangle$ ein beliebiges Skalarprodukt auf $\mathbb{R}[x]$.

(i) Beginnend mit den Polynomen $w_0, w_1, w_2, \ldots$ mit $w_i = x^i$ verwende das Gram-Schmidt-Verfahren, um zu zeigen, dass es Polynome $p_i(x)$ für $i \geq 0$ gibt, so dass

$$(*) \qquad \operatorname{Grad}(p_i(x)) = i \quad \text{und} \quad \langle p_i(x), p_j(x) \rangle = 0 \text{ für alle } i \neq j.$$

(ii) Zeigen Sie, dass Polynome $p_i(x)$ für $i \geq 0$, die die Bedingung (*) erfüllen, bis auf die Multiplikation mit einem von Null verschiedenen Skalar eindeutig bestimmt sind. [Hinweis: Benutzen Sie Induktion über i. Sie können ohne Beweis die (einfache) Tatsache verwenden, dass $(p_0(x), p_1(x), \ldots, p_d(x))$ eine Basis des Vektorraums P_d von Polynomen vom Grad $\leq d$ ist.]

(iii) Die *Legendre-Polynome* $P_i(x)$ sind die so erhaltenen Polynome mit dem Skalarprodukt

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx,$$

und mit einem Skalar multipliziert, so dass $P_i(1) = 1$. Finden Sie $P_i(x)$ für $0 \leq i \leq 3$. Sie können Folgendes verwenden:

$$\int_{-1}^{1} x^i dx = \left[\frac{x^{i+1}}{i+1}\right]_{-1}^{1} = \begin{cases} 2/(i+1) & (i \text{ gerade}) \\ 0 & (i \text{ ungerade}). \end{cases}$$