Lineare Algebra II
4. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 05.05.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 4.1. (2+2) Finden Sie die Eigenwerte und Basen der Eigenräume für die folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -3 & -1 \\ 10 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}), \qquad B = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 \\ 2i & -1 & 1+2i \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{C}).$$

Aufgabe 4.2. (2+2) Seien $P_2 = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] : \operatorname{Grad} p(x) \leq 2\}$ und $f \in \operatorname{End}(P_2)$ der Endomorphismus gegeben durch

$$f(p(x)) = x\,\frac{dp}{dx} + p(x+1),$$

also $f(ax^2 + bx + c) = x(2ax + b) + a(x+1)^2 + b(x+1) + c$.

(i) Finden Sie die Matrix von f bezüglich der Basis $(1, x, x^2)$ von P_2.
(ii) Finden Sie die Eigenwerte von f und zugehörigen Eigenvektoren.

Aufgabe 4.3. (1+2+1) Sei K ein Körper mit $\operatorname{char}(K) \neq 2$ und V ein Vektorraum über K.

(i) Es gibt nur zwei mögliche Eigenwerte eines Endomorphismus $f \in \operatorname{End}(V)$ mit $f^2 = \mathrm{Id}_V$. Was sind sie und warum?
(ii) Finden Sie die Eigenwerte und Basen der Eigenräume für die lineare Abbildung $T : M_2(K) \to M_2(K)$, $A \mapsto A^{\mathrm{T}}$.
(iii) Was passiert, wenn $\operatorname{char}(K) = 2$?

Aufgabe 4.4. (2+2) Angenommen, Endomorphismen $f, g \in \operatorname{End}(V)$ kommutieren, d. h. $fg = gf$.

(i) Sei $\lambda \in K$ und sei V_λ der λ-Eigenraum für f. Zeigen Sie, dass V_λ invariant für g ist. Das heißt, $g(V_\lambda) \subseteq V_\lambda$.
(ii) Angenommen, $K = \mathbb{C}$ und V sei endlichdimensional und nicht Null. Zeigen Sie, dass f und g einen gemeinsamen Eigenvektor haben. Das heißt, es gibt einen Vektor $v \in V$, der ein Eigenvektor für f und ein Eigenvektor für g ist. [Hinweis: Betrachten Sie die Einschränkung von g auf V_λ als einen Endomorphismus von V_λ.]