Lineare Algebra II
5. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 12.05.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 5.1. (1+1+1+1) Für jede der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

finden Sie die Eigenwerte und ihre algebraischen und geometrischen Vielfachheiten. Welche dieser Matrizen sind diagonalisierbar?

Aufgabe 5.2. (1+1+2) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ hat $\chi_A(X) = -(X-1)^2(X-2)$.

(i) Finden Sie Basen der Eigenräume für A (als Matrix in $M_3(\mathbb{R})$).
(ii) Finden Sie $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ und eine Diagonalmatrix D, so dass $D = P^{-1}AP$.
(iii) Finden Sie P^{-1} mit elementare Zeilenumformungen.
(iv) Lösen Sie die simultanen linearen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= 3x_n + 2y_n - 4z_n \\ y_{n+1} &= x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} &= x_n + y_n - z_n \end{aligned}$$

mit $x_0 = 1$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$.

Aufgabe 5.3. (4) Wir betrachten eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} - 6f = 0$$

für eine zweimal differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Durch Setzen von $g = df/dx$ kann sie in simultane Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \phantom{6f - {}} g \\ \frac{dg}{dx} &= 6f - g \end{aligned}$$

umgewandelt werden. Finden Sie die allgemeine Lösung, indem Sie die entsprechende Matrix diagonalisieren.

Aufgabe 5.4. (4) Sei V ein Vektorraum über K und sei $f \in \mathrm{End}(V)$. Angenommen, jeder Nicht-Null-Vektor in V ist ein Eigenvektor für f. Zeigen Sie, dass $f = \lambda \mathrm{Id}_V$ für ein $\lambda \in K$.