Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 19.05.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 6.1. (4) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 6 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in M_4(\mathbb{R})$$

hat das charakteristische Polynom $\chi_A(X) = (X-2)^2(X+1)^2$. Finden Sie das Minimalpolynom.

Aufgabe 6.2. (1+3) Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und zeigen Sie damit, dass das Minimalpolynom der Matrix

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in M_n(K)$$

gleich $(X-\lambda)^n$ ist.

Aufgabe 6.3. (4) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen dasselbe Minimalpolynom haben.

Aufgabe 6.4. (1+1+2) Sei $A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(i) Zeigen Sie, dass $\chi_A(X) = c(1 - Xp(X))$, wobei $c = \det(A) \neq 0$ und $p(X) \in K[X]$.
(ii) Zeigen Sie, dass $A^{-1} = p(A)$.
(iii) Verwenden Sie dies, um A^{-1} für die folgende Matrix zu finden:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$