Lineare Algebra II
9. Übungsblatt

William Crawley-Boevey

Abgabe: Bis zum 09.06.23 um 10:00h im Postfach Ihres Tutors

Aufgabe 9.1. (2+2) Sei

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$$

eine Matrix mit positiven Koeffizienten.

(i) Finden Sie eine Formel für den größten Eigenwert ρ von A.
(ii) Zeigen Sie daher direkt, dass $|\lambda| < \rho$ für den anderen Eigenwert λ.

Aufgabe 9.2. (4) Seien $z_1, z_2, \ldots$ komplexe Zahlen ungleich Null. Beweisen Sie, dass wenn

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|,$$

dann haben die z_i alle das gleiche Argument. (Vorschlag. Für den Fall $n = 2$ schreiben Sie $z_2/z_1 = re^{i\theta}$ und betrachten Sie die Gleichung $|1 + re^{i\theta}|^2 = (1+r)^2$. Dann verwenden Sie die vollständige Induktion für $n > 2$. Dies wird im Lemma im Abschnitt 9.4 verwendet.)

Aufgabe 9.3. (2+2) Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

(i) Finden Sie den Perron-Frobenius-Eigenwert ρ und einen Eigenvektor mit positiven Komponenten für A.
(ii) Finden Sie durch Diagonalisierung von A oder auf andere Weise $\lim_{m\to\infty} (\frac{1}{\rho} A)^m$.

Aufgabe 9.4. (2+2) Eine Markov-Kette mit den Zuständen S_1, S_2, S_3 wird durch eine Matrix A unten gegeben (die nicht nur positive Koeffizienten hat). Beschreiben Sie das Langzeitverhalten der Markov-Kette für jeden der möglichen Ausgangszustände, indem Sie die Potenzen von A untersuchen.

$$\text{(i) } A = \begin{pmatrix} 1/10 & 2/10 & 0 \\ 9/10 & 8/10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{(ii) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 2/3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$